SERIE CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN
NÚM. 46

Enero 1999

INTRODUCCION A LOS INSTRUMENTOS DERIVADOS Y SU APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE RIESGO

RAÚL B. GONZALEZ DE PAZ

En la Serie "Cuadernos de Investigación" del CEMLA se presentan avances y resultados preliminares de investigaciones, experiencias y discusiones sobre temas financieros, monetarios y bancarios, algunos de los cuales corresponden a ponencias presentadas en reuniones especializadas de bancos centrales y organismos de supervisión bancaria. El principal objetivo de la publicación es difundir estos trabajos entre los investigadores, funcionarios y técnicos de las instituciones miembros del CEMLA, así como entre las personas interesadas en la materia, en el entendido que las opiniones expresadas son responsabilidad exclusiva de los autores y no comprometen a las instituciones en que trabajan, ni al CEMLA. Cabe aclarar que los documentos presentados en estos cuadernos no se han sometido a la revisión editorial que el CEMLA aplica a sus publicaciones. Dado el carácter preliminar de estos trabajos se fomenta la elaboración de comentarios y sugerencias, los que pueden enviarse a la página del CEMLA en Internet (http://www.cemla.org) con atención al Sr. Edwin Rivera Lamsick.

Derechos reservados por los autores respectivos. Se prohibe la reproducción de este trabajo sin la autorización previa de los autores y el CEMLA, excepto citas no mayores a dos párrafos. Las solicitudes de permiso se pueden enviar a: CEMLA, Departamento de Ediciones, Atención Sr. Jesús Sobrevilla, Durango 54, México, D.F. , C.P. 06700. México, Fax (525) 5254432. E-Mail: sobrevilla@cemla.org. La respuesta a las solicitudes de permiso se remitirá en un lapso máximo de un mes a partir de la recepción de las mismas. Cabe aclarar que es política de la Institución otorgar sin costo el permiso respectivo a instituciones miembros del CEMLA, a instituciones educativas y de investigación, y a organizaciones no lucrativas que difunden la investigación económica.

ÍNDICE

Introducción a los instrumentos derivados y su aplicación al análisis de riesgo

*Dr. Raúl B. González de Paz**

I. INTRODUCCIÓN

En el estudio de la economía y las finanzas contemporáneas, dos factores son imprescindibles para ser tomados en cuenta: el tiempo y la información. La toma de decisiones del agente económico se lleva a cabo en base a la información disponible en un momento dado; en todo momento, el agente está sujeto a dos tipos de restricciones: la disponibilidad de riqueza y la disponibilidad de tiempo para recabar información. Como el tiempo utilizado para recabar información es también un recurso escaso (relativo a la información disponible), consecuentemente ésta es siempre incompleta, lo que quiere decir que las decisiones de los agentes económicos se toman siempre partiendo de una situación de mayor o menor incertidumbre.

Podemos afirmar sin temor a equivocarnos que el componente más importante de la información para los agentes económicos es el comportamiento futuro de los precios, de manera que todos los agentes tratan de maximizar su información sobre éstos, tomando sus decisiones en base a expectativas sobre dichos comportamientos. Durante las últimas dos décadas, el contexto económico mundial ha cambiado en forma tal, que el proceso de formación de expectativas y de toma de decisiones tiene que considerar el factor incertidumbre de manera mucho más formal utilizando metodologías cuantitativas apropiadas.

En lo subsiguiente se presentarán de manera concisa algunos aspectos de este desarrollo, esperando que sea de utilidad a quienes lo lean para una mejor comprensión del tema y al mismo tiempo sirva de punto de partida a estudios mas profundizados.

* El autor es Consultor del Banco de Guatemala y Profesor visitante de la Maestría de Economía del Instituto Tecnológico Autónomo de México

I.1. El cambio de paradigmas en la teoría financiera

Después del advenimiento y empleo intensivo de una serie de instrumentos en los mercados financieros más importantes, la utilización en gran escala de modelos cuantitativos para su estudio y aplicación no es más que una consecuencia de la evolución sufrida por el entorno económico-financiero durante las últimas décadas.

Antes de esta revolución de la teoría y el análisis financiero, las finanzas se componían casi exclusivamente de una colección de instrumentos contables y reglas empíricas, conformando una disciplina de tipo descriptivo. La metodología matemática en los modelos financieros se concentraba en el cálculo del valor presente, y en la práctica, el riesgo como variable de análisis no era modelado formalmente; no fue sino en los años cincuenta que se comienzan a dar los primeros cambios. Estos llevarían a los cambios fundamentales de las últimas dos décadas.

Durante la década de los setentas, los mercados de capitales de Norteamérica sufrieron cambios estructurales, que se reflejaron en una mayor volatilidad en precios y tasas de interés, fluctuaciones de tipos de cambio, inflaciones de dos dígitos y otros fenómenos similares; los instrumentos de análisis financiero utilizados hasta entonces se hicieron obsoletos. Durante el período mencionado también comienzan a negociarse cada vez en mayor cantidad los títulos financieros contingentes o derivados(o sea, activos cuyo precio depende del precio de otro activo financiero), tales como opciones de compra y venta sobre acciones; futuros sobre divisas, sobre bonos o sobre Certificados del Tesoro Americano. El éxito en el uso de tales instrumentos, reflejado en el creciente volumen de negociación de éstos, se debió primordialmente a su utilidad para cubrir y administrar riesgos en el marco del nuevo entorno financiero.

Los cambios estructurales mencionados y el consecuente incremento en el uso de los "nuevos" instrumentos financieros han conllevado en forma paralela a un cambio de paradigmas en la teoría y metodología de análisis. Estos pueden resumirse en tres aspectos:

1. La necesidad de formalizar claramente los esquemas de interacción de variables y la disponibilidad de computadoras de gran capacidad de procesamiento numérico han llevado a un cambio, partiendo de la modelación de tipo verbal de los problemas se ha llegado en la actualidad a una modelación de tipo matemático.

2. El enfoque teórico de las finanzas ha dejado de partir desde una perspectiva contable, para ser planteado ahora desde una perspectiva económica: los trabajos que dieron origen a la "nueva " economía financiera se basan en la moderna teoría microeconómica.

3. El reconocimiento del papel central del riesgo y la incertidumbre en el análisis del comportamiento de los precios. La teoría financiera actual podría definirse como la economía de la incertidumbre, la hipótesis central es que los precios se comportan

aleatoriamente y por tanto es necesario modelar dicho comportamiento a partir de esa hipótesis.

Veremos a continuación cuales fueron las consecuencias concretas de los nuevos esquemas de pensamiento en el quehacer y la teoría financiera.

I.2. La evolución de la teoría financiera

La teoría moderna de las finanzas comienza a finales de la década de los cincuentas, sin embargo, es interesante mencionar que un precursor en la utilización de modelos con variables aleatorias para el cálculo de precios de activos financieros fue Louis Bachelier, quien publicó un trabajo sobre la teoría de la especulación como tesis doctoral en la Sorbona en el año 1900. Su trabajo fue precursor de la teoría de procesos aleatorios, la cual se desarrolló posteriormente durante el presente siglo. Algunos resultados de la tesis de Bachelier se encuentran años después desarrollados independientemente por Einstein, quien los aplica a la modelación de procesos físicos de difusión de partículas en fluidos; estos modelos son conocidos actualmente como procesos aleatorios brownnianos o movimientos brownnianos[1]. Desafortunadamente, debido a cierta falta de rigor matemático, el trabajo de Bachelier cayó en el olvido y según parece, no fue sino hasta fines de los años cincuenta que es dado a conocer de nuevo por Samuelson, mencionándolo en algunos de sus trabajos sobre modelos de inversión y precios bajo incertidumbre.

Los primeros trabajos que marcan un cambio son las investigaciones de Arrow y Debreu sobre modelos de mercados bajo incertidumbre, demostrando como el modelo original en régimen de certidumbre podía ser adaptado. Por otra parte, tenemos los resultados de Modigliani y Miller sobre finanzas corporativas. A grandes rasgos, el resultado fundamental que estos últimos enuncian es que, en un mercado en equilibrio, distintos paquetes de activos financieros que ofrecen distintas alternativas para generar el mismo flujo de retornos son en esencia equivalentes y por tanto tienen el mismo precio. De hecho, el resultado fundamental de valuación de opciones publicado por Black y Scholes en el año 1973 puede considerarse como una generalización del teorema de Modigliani-Miller en un marco intertemporal. Por otro lado, es de hacer notar que en el estudio de Modigliani-Miller son importantes los argumentos basados en la noción de arbitraje (estrategia de inversión con utilidad positiva, que en principio no requiere inversión inicial), argumentos que en la actualidad son utilizados intensivamente en los modelos de valuación de activos financieros contingentes.

Otra innovación importante se lleva a cabo por el lado de la teoría de inversiones y mercados de capitales. Se trata del modelo de media- varianza de selección de portafolios desarrollado por Markowitz , publicado en 1959 y el cual permite optimizar el costo de riesgo de una cartera de inversión mediante el análisis de correlación de los retornos de los activos que la componen. A partir de dicho modelo, Sharpe y Lintner proponen el modelo de valuación de activos de capital, mejor conocido por sus siglas en inglés CAPM (Capital Asset Pricing Model). Según el CAPM, el retorno esperado de cualquier activo se puede

[1] Ver Apéndice

expresar como la suma de la tasa de interés de un activo financiero sin riesgo (i.e. un bono) más un múltiplo de la prima de riesgo (i.e. la diferencia entre el retorno esperado del mercado y el retorno libre de riesgo), el coeficiente de multiplicidad (llamado el coeficiente "beta") se calcula en términos de la covarianza entre el retorno del mercado y el retorno libre de riesgo. Para la industria financiera, este modelo ha constituido durante las décadas siguientes un instrumento básico para la medición del rendimiento de inversiones.

Sin embargo, el modelo CAPM ha sido criticado durante la última década, habiendo surgido controversias tanto a nivel académico como práctico sobre su validez; es más, otros modelos tales como la teoría de valuación por arbitraje o APT (Arbitrage-Pricing Theory) desarrollado por Ross surge como alternativa. En este modelo, mediante razonamientos de arbitraje y de diversificación de portafolios, se llega a una relación de tipo lineal entre la tasa de retorno de un activo y factores tales como el retorno esperado y el riesgo.

Otra contribución importante de los años sesentas fue la Hipótesis de los Mercados Eficientes, enunciada por Samuelson y Fama. Dicha hipótesis enuncia que, en un mercado financiero con acceso a la información y que funciona sin fricciones, el comportamiento de la dinámica de precios puede ser modelado mediante un proceso aleatorio conocido con el nombre de martingala([2]). A principios de siglo, Bachelier había propuesto una hipótesis de comportamiento similar para los precios de activos financieros. En otras palabras, la mejor estimación del precio futuro de un activo será el precio observado hoy, y consecuentemente, esto invalida los intentos de predecir los precios de activos en el futuro mediante la utilización de datos históricos. De hecho, esta propiedad ya había sido observada en forma empírica por Kendall a principios de los años cincuenta. Según la teoría económica, esto se debería a que los precios reflejan toda la información disponible en el mercado. Un cambio en los precios se dará siempre y cuando algún agente económico en el mercado obtenga información adicional. Consecuentemente, la predicción de precios no sería factible.

A principios de los setentas una intensa actividad académica desarrolla ampliaciones de los modelos propuestos. Para tomar en cuenta los aspectos de incertidumbre e intertemporalidad en la valuación de activos y en la toma de decisiones en el ámbito financiero, se utilizan metodologías matemáticas cada vez más avanzadas, tales como la programación dinámica, el cálculo estocástico y las ecuaciones en derivadas parciales. El resultado más importante de estas investigaciones fue el modelo para valuación de opciones de Black y Scholes (otro importante contribuidor fue Merton), cuyo impacto en los mercados de capitales fue casi instantáneo. El Chicago Board Options Exchange (CBOE) comienza sus actividades oficiales de negociación de opciones en 1973, justo un mes antes de ser publicado el artículo original de Black y Scholes. Su ventaja esencial era de proponer una fórmula relativamente asequible para calcular los precios de opciones, de manera que, dos años después, el modelo era ampliamente utilizado por los corredores de bolsa del CBOE.

La idea básica subyacente al modelo de Black y Scholes es que mediante ciertos propiedades del mercado, cualquier opción sobre un activo financiero puede ser <u>replicada</u>, es

[2] Ver Apéndice

decir, se puede hallar una estrategia de inversiones tal que la cartera correspondiente generará el mismo flujo de retornos que la opción. Si las condiciones del mercado son tales que las oportunidades de arbitrajes están excluidas, entonces el precio de la opción y el precio de la cartera replicante deben ser iguales. Como los instrumentos financieros derivados esencialmente son composiciones de dos instrumentos básicos: contractos adelantados (forward) y opciones, entonces se puede analizar el riesgo del instrumento derivado mediante sus componentes. Puede decirse que la contribución fundamental de Black, Scholes y Merton fue la de descubrir como asignarle un precio al riesgo. Asumiendo que el sistema se comporta como un mercado sin costos de transacción, ni restricciones de corto plazo, mercado en el cual se dispone de dos instrumentos financieros, los cuales consisten en un bono de rendimiento sin riesgo y un activo financiero con un rendimiento con riesgo. Se asume que los precios del bono y el activo en el período t, S_t^0 y S_t^1 respectivamente, los cuales son descritos por las fórmulas:

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt}, 0 \leq t < T$$

$$S_t^1 = S_0^1 \exp(\sigma W_t + (\mu - \sigma^2/2)t), \sigma > 0$$

En estas fórmulas, r es la tasa de interés sin riesgo, de manera que el precio del bono se calcula asumiendo un comportamiento de capitalización continua[3]. En el precio del activo, σ representa la volatilidad del activo (desviación estándar de la tasa de retorno), μ se puede interpretar como la tasa esperada de retorno del activo y W_t es una variable de tipo aleatorio que describe un movimiento brownniano clásico [4] (valor esperado nulo y varianza unitaria para toda etapa *t*). Bajo estos supuestos, el proceso aleatorio S_t^1 representa un proceso aleatorio llamado movimiento brownniano geométrico. Consideramos ahora una componente adicional en el mercado: una opción de compra (call-option) de tipo europeo referente al activo con riesgo; la opción da a su tenedor el derecho, pero no la obligación, de comprar el activo a un precio de ejercicio E , dado para una fecha de expiración de validez de la opción *T*. El proceso aleatorio Y_t , que describe el comportamiento del precio de la opción, debe cumplir con la condición: $Y_T = \max\left(S_T^1 - E, 0\right) = \left(S_T^1 - E, 0\right)^+$, ya que la opción de compra será ejercida a su vencimiento si y solamente si el precio de ejercicio es menor que el precio del activo (i. e. $S_T^1 > E$).

Basados en supuestos de comportamiento según expectativas racionales para los agentes económicos, Fischer Black y Myron Scholes publican en Abril de 1973 una fórmula desarrollada por ellos donde se describe el precio de la opción de compra $Y_t = C\left(S_t^1, t\right)$ mediante una función definida en términos de distribuciones acumuladas de probabilidad, siendo ampliamente utilizada en la actualidad en los medios bursátiles para la negociación de opciones. Por ejemplo, al inicio del proceso (*t=0*), el valor en equilibrio, una vez agotadas las posibilidades de arbitraje, de la opción de compra europea con precio de ejercicio *E* y fecha de expiración *T* será:

[3] Ver Apéndice
[4] Ver Apéndice

$$C_0 = S_0^1 N(d_1) - e^{-rT} EN(d_2)$$

Donde $d_1 = \dfrac{\ln\left(S_0^1/E\right) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$ y $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

La función *N(d)* describe la distribución acumulada de probabilidad para una variable aleatoria tipo normal.

Un hecho interesante es que la fórmula no involucra variables que describan la actitud del inversionista frente al riesgo. Por ejemplo, el parámetro μ que representa la tasa de retorno esperada del activo no se encuentra presente. En cierta forma, esta información ya es tomada en cuenta al incluir el precio del activo.

Aunque la fórmula de Black y Scholes puede parecer complicada, se puede interpretar de forma intuitiva. Los términos *N(d)* indican probabilidades de riesgo de que el activo pierda valor. Por ejemplo, si ambos términos tienen un valor cercano a uno, lo que significaría una alta probabilidad de que la opción sea ejercida, entonces se tiene como valor aproximado de la opción al inicio del proceso: $C_0 = S_0^1 - e^{-rT} E$, lo cual no es más que el precio del activo al inicio del período menos el valor presente del precio de ejercicio, lo cual vendría a ser el valor intrínseco ajustado de la opción. En el caso de que los términos *N(d)* tengan valores cercanos a cero, ésto significa que la opción seguramente no será ejercida, ya que ésta tendrá en ese caso un valor casi nulo. Para valores intermedios, el valor dado por la fórmula de Black y Scholes puede interpretarse como el valor presente esperado de la utilidad (pay-off) potencial de la opción, ponderado por la probabilidad de que ésta se encuentre dentro de su precio ("in the money"). Obsérvese que las variables d_1, d_2 se incrementan ambas cuando el precio del activo aumenta, siendo las funciones de distribución acumulada funciones monótonas crecientes, éstas también se incrementan al aumentar el precio del activo. Es decir, si el precio del activo es mayor que el precio de ejercicio convenido, es más probable el ejercicio de la opción.

Como se mencionó al principio, Black y Scholes demostraron además que la valuación de la opción dada por el modelo se basa únicamente en argumentos de arbitraje. Grosso modo, el razonamiento se basa en una generalización del teorema de Modigliani-Miller: el principio sostiene que dos activos con el mismo rendimiento a un horizonte futuro fijado de antemano deben tener el mismo valor presente. De manera que actualizando continuamente una cartera de inversión de forma auto-financiable (es decir, sin agregar o retirar fondos de la inversión en ningún momento) se puede <u>replicar</u> el flujo de retornos de cualquier opción. Consecuentemente, comprar la opción equivale a invertir en un portafolio equivalente y esto significa que ambos activos tienen el mismo valor presente.

El aporte fundamental de Black y Scholes fue ampliado y formalizado por varios autores, por un lado, Cox, Ross y Rubinstein demostraron resultados equivalentes basados en procesos aleatorios binomiales, simplificando enormemente el cálculo de los precios. Además, demostraron que utilizando resultados apropiados sobre convergencia aleatoria, al límite se obtienen los mismos resultados. Por otra parte, Harrison y Kreps, a principios de los ochentas, formalizan los resultados y argumentos de Black y Scholes utilizando la definición de valuación por martingalas. Este enfoque tendría una enorme influencia en el desarrollo subsiguiente de la teoría financiera, desarrollo que actualmente continúa bajo múltiples aspectos; cabe mencionar, desde el punto de vista práctico, el desarrollo de coberturas de riesgo mediante opciones (risk-hedging), y desde la perspectiva teórica, los modelos con tasas de interés aleatorias para valuación de derivados. Otros modelos involucrando factores adicionales como costos de transacción, diversas monedas y tipos de cambio, etc. siguen siendo sujeto de trabajo e investigación, tanto por parte de investigadores del sector académico como del sector involucrado en la práctica. Es interesante hacer notar que la transición de las investigaciones académicas hacia una atención por parte del sector involucrado en el quehacer del mundo financiero "real" se esta efectuando de manera casi instantánea, fenómeno notable cuando una ciencia entra en una etapa de desarrollo tan dinámico.

I.3. El problema del análisis de riesgo financiero

Del inciso anterior queda claro que una revolución científica influencia en la actualidad el quehacer de los mercados financieros, pero no es solamente el marco teórico discutido previamente el que hay que tomar en cuenta. Los mercados han sufrido asimismo el impacto de las innovaciones tecnológicas: por el lado de la telemática se llega a una comunicación en línea permanente de los mercados a nivel mundial; por el lado de la informática la capacidad de procesamiento permite identificar cuantitativamente los factores de riesgo del mercado y efectuar una modelación de éstos. Además, la tecnología moderna genera una transformación a fondo de todo el esquema de negociación e intermediación financiera. Todas estas influencias afectan y generan una profunda mutación en la estructura de los mercados.

Algunas de las tendencias predominantes que pueden identificarse son las siguientes:

1. El énfasis de la actividad bancaria a nivel global pasará del ramo de préstamos y depósitos al de negociación de activos (trading) y bursatilización (securitization).
2. El riesgo dominante no provendrá del crédito en particular, sino del mercado en general, debido al incremento en su volatilidad y a la globalización.
3. Los factores de riesgo en el mercado serán cada vez más numerosos.
4. La competencia entre los distintos agentes del mercado (bancos, casas de bolsa, otras entidades financieras) será cada vez mayor y más intensa, ya que los servicios ofrecidos por cada uno de ellos tenderán a traslaparse con las esferas de acción de otros agentes.
5. Los productos financieros se diversificarán cada vez más, incrementándose su refinamiento técnico-financiero.

Estas tendencias hacen que en la actualidad los agentes financieros y los académicos se ocupen con toda seriedad de la administración del riesgo (risk-management), una de cuyas técnicas es precisamente el uso de los activos contingentes o derivados, sobre los que se discutirá a fondo posteriormente.

I.4. Implicaciones para la Banca Central

En lo que a implicaciones en materia de Banca Central se refiere, no es sino hasta muy recientemente que todo este desarrollo ha comenzado a ser tomado en cuenta. Para efectos de política de Banca Central, los "nuevos" instrumentos financieros pueden ser tomados desde tres perspectivas distintas: por un lado es necesario estudiar como afectan estos instrumentos lo relativo al entorno monetario y cambiario; por ejemplo, algunos estudios presentan la hipótesis de que el comportamiento de los precios de las opciones y futuros dan información sobre la formación de expectativas y generación de tendencias en el mercado, por lo que se buscaría cómo incorporar la información generada por éstos dentro de indicadores económicos, a fin de ser utilizada en términos de política monetaria. Por el lado de supervisión bancaria también existe una vasta línea de investigación por explorar, en lo que al análisis de riesgo financiero se refiere. Además, Merton menciona en un artículo a fines de los setentas la posibilidad de utilizar la teoría de valuación de opciones para calcular el costo de seguros de depósito y de garantías de préstamo. Por otro lado, también hay que tomar en cuenta que dichos instrumentos financieros pueden a su vez ser utilizados por el Banco Central para coadyuvar la implementación de medidas de política monetaria y cambiaria, para tal efecto es importante citar el ejemplo de la emisión de opciones de compra de dólares US utilizada en los últimos dos años por el Banco de México; hasta ahora, tal parece que dicho instrumento ha demostrado cierta efectividad para limitar la volatilidad en las fluctuaciones del tipo de cambio del peso mexicano versus el dólar norteamericano.

Asimismo, todavía no se ha investigado lo suficiente la posibilidad de su utilización en el manejo de reservas internacionales, en lo que a cobertura de riesgos y manejo de cartera se refiere. En todo caso, ya no puede pasar desapercibido para los involucrados en las tareas de Banca Central este enorme giro que la teoría y la práctica financiera de los mercados internacionales han sufrido en sus fundamentos, ya que al día de hoy, las consecuencias de esta revolución juegan un papel preponderante en el acontecer diario del mundo financiero moderno.

Estos apuntes tienen como objetivo presentar un esquema general sobre algunos de los instrumentos y metodologías desarrollados por la tecnología financiera actual para análisis y cobertura de riesgo. Su contenido no persigue originalidad alguna, se presentan las definiciones y propiedades más importantes sobre los instrumentos derivados, más adelante se utilizan para diseñar estrategias de cobertura de riesgo. Se dan al final algunas nociones sobre el análisis de riesgo utilizando la técnica de Valor en Riesgo, la cual se ha convertido en un estándar de la industria financiera. Se espera que los próximos capítulos sean útiles como una introducción a material más amplio y avanzado, proporcionando la base adecuada.

II. ACTIVOS FINANCIEROS CONTINGENTES O DERIVADOS

Un activo derivado o contingente (contingent claim) es un título financiero cuyo valor depende del valor de otra variable, usualmente el precio de otros activos, llamados activos subyacentes. Por ejemplo, el valor de una opción de compra o venta para una acción determinada es una variable contingente o derivada del precio de dicha acción. Se mencionó anteriormente la necesidad de creación de instrumentos que coadyuven a una administración de riesgo más eficiente. Podemos afirmar que en general, lo que se busca es una forma de transferir riesgo, al menos parcialmente, a otro agente de la economía. La finalidad principal de los instrumentos derivados es la cobertura de riesgos (risk hedging) en operaciones financieras, sin embargo, pueden ser utilizados con fines de especulación en el mercado financiero, lo cual puede ser altamente arriesgado, como se puede ver en el famoso caso del banco Barings u otros similares que han sido públicos. Otro objetivo del negociador de derivados puede ser el de obtener una utilidad sin riesgo llevando a cabo operaciones en dos o más mercados simultáneamente (arbitraje). De hecho, muchos agentes de bolsa se ocupan precisamente de buscar constantemente oportunidades de arbitraje. Sin embargo, si los mecanismos de transferencia y acceso de información son eficientes, el mercado eliminará rápidamente tales oportunidades. Es por ello que en la teoría de valuación de derivados se asume la ausencia de arbitrajes en el mercado.

A continuación presentaremos las características principales de los siguientes derivados:

1. Contratos adelantados (forwards) y futuros
2. Canjes (swaps)
3. Opciones de compra y venta (calls y puts)

De hecho, existe toda una serie de derivados adicionales, y todos los días surgen nuevas variedades de instrumentos en el mercado financiero. Sin embargo, en su mayoría pueden ser tomados como combinaciones de los precedentes, por lo que nos limitaremos a la lista mencionada de ahora en adelante. Haremos énfasis en lo posible en los aspectos relacionados con manejo de divisas, debido a su importancia en el quehacer de la Banca Central.

II.1 Contratos adelantados (forwards) y futuros

Se trata de contratos en los cuales los participantes contraen al momento de suscribirlo, el compromiso de intercambiar a un plazo futuro dado un activo a un precio estipulado de antemano. Existe un enorme mercado de estos contratos sobre una gran variedad de activos, desde activos reales (commodities) como trigo, azúcar, café, petróleo hasta activos financieros como bonos, divisas o acciones. Los mercados de futuros más importante son el Chicago Mercantile Exchange (CME) y el Chicago Board of Trade (CBOT), el primero mencionado fue de hecho el primero en funcionar como tal desde el siglo pasado, al negociar futuros sobre granos.

La diferencia entre los futuros y los contratos adelantados es que los primeros se intercambian en mercados establecidos, teniendo ya una estructura estandarizada, en cambio los contratos adelantados (forwards) se diseñan según las necesidades del cliente, recayendo el riesgo crediticio sobre la contraparte con la cual se haga la operación. Por el otro lado, en el caso de los futuros, el riesgo crediticio recae sobre la Cámara de Compensación de la Bolsa donde se opere, por lo que en este caso se tabulan pagos diarios de manera que el valor de la operación sea nulo al finalizar el día.

La tabulación se efectúa de la siguiente manera: las partes contratantes deben depositar unos "márgenes", es decir, ciertas cantidades de dinero que actúan como garantías para cubrir las posibles pérdidas del mercado. La finalidad es minimizar el riesgo de las operaciones por falta de cumplimiento de alguna de las partes. En el momento de establecerse un contrato de futuros, se tiene un comprador, del cual se dice que asume una posición larga (long position) y un vendedor, el cual a su vez se dice que asume una posición corta (short position). Al inicio del período del contrato, ambos depositan una cierta cantidad en la Cámara (márgenes) y cada día se calcula el diferencial de precios futuros respecto al precio futuro del día anterior. Si el precio futuro aumenta, esto beneficia al comprador, de manera que el diferencial de precio se descuenta del margen del vendedor y se abona a la cuenta del comprador; en caso contrario, la operación se efectuará a la inversa. En caso de que se efectúen una serie de descuentos en una de las cuentas, puede ocurrir que ésta descienda hasta un margen mínimo o de mantenimiento, en cuyo caso la Cámara lleva a cabo una llamada al margen al depositario de la cuenta, a fin de que éste deposite una suma tal que el margen se reconstituya a su nivel inicial. En caso de que alguna de las partes no atienda una llamada al margen y no deposite lo requerido, el contrato se cancelará de oficio. Al finalizar el plazo, una de las partes habrá tenido una utilidad equivalente a la pérdida de la contraparte.

Para efectos de la valuación de contratos futuros, asumiremos que el mercado se encuentra en equilibrio y no existen posibilidades de arbitraje (la justificación de esta hipótesis se mencionó anteriormente), asimismo asumiremos que no existen costos de transacción (éstos pueden ser agregados al modelo). En principio es más fácil calcular los precios de contratos adelantados que futuros, pero bajo ciertas hipótesis, ambos serán muy cercanos entre sí, de manera que se comenzará por el cálculo de aquellos. Lo usual es asumir una tasa de interés libre de riesgo r, constante a lo largo del período de duración del contrato. Sea S el precio de mercado del activo subyacente (precio spot). Asumiendo capitalización continua de intereses, lo cual es lo usual en este marco teórico, y utilizando razonamientos de arbitraje, tenemos como precio forward F para un activo que no genera ningún ingreso durante el período de tiempo T-t: $F = Se^{r(T-t)}$. El parámetro T designa, utilizando múltiplos de año, la etapa cuando vence el contrato adelantado, t designa la etapa cuando se inicia el contrato. Por ejemplo, supongamos que hoy se inicia el contrato adelantado de una acción que no paga dividendos, que vence en seis meses. Si el precio spot de la acción al día de hoy es de \$80.- y la tasa de interés libre de riesgo a seis meses es de 6.5% anual entonces se tiene:

$$T\text{-}t=0.5\ ,\ r=0.065,\ \ S=80$$

de manera que utilizando capitalización continua se tiene como precio forward:

$$F = 80e^{0.065*0.5} = 82.6427$$

Una divisa extranjera puede ser interpretada como un activo que tiene un rendimiento de dividendos, es decir, los dividendos generados por el activo pueden expresarse como un porcentaje del precio spot. Esto se debe a que el monto de una divisa puede ganar intereses a una tasa de interés libre de riesgo en el país de origen (estos serían los dividendos). Para incorporar este aspecto en nuestra perspectiva, asumiremos que el rendimiento de dividendos se paga en forma continua basado en una tasa de rendimiento q (en el caso de divisas extranjeras, esta será la tasa de interés libre de riesgo del país de origen de la divisa). La valuación "forward" de tipos de cambio se deduce de la forma siguiente:

A. Sea $Q_X(t)$ la cantidad de divisa del país X utilizada para comprar la cantidad $Q_{USA}(t)$ de dólares americanos en el período t, compra en la cual se utilizó el tipo de cambio S_t. Es decir, se tiene la equivalencia en monedas: $Q_X(t) = Q_{USA}(t) * S_t$.

B. El monto $Q_{USA}(t)$ se invierte en los Estados Unidos de América en un instrumento libre de riesgo durante el período $[t, T]$, a partir de t hasta T, a una tasa de interés R. Al vencimiento en T el inversionista recibe $Q_{USA}(T) = Q_{USA}(t) * e^{R(T-t)}$

C. Por otro lado, en la etapa t se compra un futuro sobre dólares americanos por un monto $Q_{USA}(T)$, con vencimiento en T y pactado a un tipo de cambio F. Esto quiere decir que al vencimiento se recibirá el monto $Q_X(T) = Q_{USA}(T) * F$.

Nótese que en este caso F será el precio futuro del dólar en la divisa de X.

Ahora bien, si substituimos el resultado de la estrategia B) en el resultado de la estrategia C):

$$Q_X(T) = Q_{USA}(t) * e^{R(T-t)} * F.$$

Si lo expresamos todo ahora en términos de la divisa X:

$$Q_X(T) = \frac{Q_X(t)}{S_t} * e^{R(T-t)} * F$$

Esto quiere decir que durante el período $[t,T]$ se obtiene como rendimiento en los Estados Unidos en términos de la divisa de X :

$$\frac{Q_X(T)}{Q_X(t)} = \frac{F}{S_t} * e^{R(T-t)}$$

Adicionalmente se tiene r, la tasa libre de riesgo de X , de manera que invirtiendo en X el mismo monto durante el mismo período se obtiene el rendimiento :

$$\frac{Q_X(T)}{Q_X(t)} = e^{r(T-t)}.$$

Para evitar la posibilidad de arbitrajes, los rendimientos en ambos mercados deben ser iguales, de manera que:

$$e^{r(T-t)} = \frac{F}{S_t} * e^{R(T-t)}$$

Despejando algebraicamente, en este caso se expresará el precio forward como:

$$F = S_t e^{(r-R)(T-t)}$$

Como ejemplo consideremos el caso de un activo que tiene una tasa de rendimiento de 6% anual (*R=0.06*) y un precio spot de $190.- (*S=190*). La tasa libre de riesgo se asume 9% (*r=0.09*). Si se suscribe un contrato adelantado de seis meses (*T-t=0.5*), el valor forward del activo será:

$$F = 190\, e^{\,(0.09-0.06)(0.5)} = 192.87148$$

Este ejemplo podría interpretarse en términos de divisas de la forma siguiente: un dólar americano vale hoy 190 unidades del país *X*, siendo la tasa libre de riesgo en los Estados Unidos de 6% al año, en cambio en *X* la tasa es de 9%, de manera que en seis meses el tipo de cambio forward sería de 192.87 unidades de *X* por un dólar americano.

Mediante argumentos de arbitraje, es posible demostrar que, en el caso de que la tasa libre de riesgo sea constante y no varíe en relación a los vencimientos, entonces el precio forward y el precio futuro son iguales para contratos de la misma duración y vencimiento. Este no será el caso cuando las tasas sean variables, lo cual es lo usual, entonces es posible encontrar relaciones entre ambos precios dependiendo del tipo de correlación existente entre las tasas de interés, diferencias que serán menores para contratos de corta duración.

En el estudio de los mercados se utiliza el concepto de Base, la cual se defina como la diferencia entre el precio "spot" del activo en una etapa *t* y el precio futuro del activo calculado a partir de *t* con un horizonte *T* ($Base = S_t - F_{t,T}$). Conforme el valor de *t* tiende al horizonte *T* , el precio futuro tiende al precio "spot" , pero conforme el período es más largo la Base puede ser mayor en términos de valor absoluto. El caso cuando la Base es positiva se le llama "*backwardation*" y cuando ésta es negativa se le conoce como "*contango*." A partir de estas situaciones, un analista financiero puede obtener información sobre los costos inherentes e inferir una estrategia de cobertura de riesgo.

II.2. Canjes (swaps)

Un canje es un contrato suscrito en forma privada por dos participantes, en el cual las partes acuerdan intercambiar flujos de pagos durante un período predeterminado. De hecho, un canje puede ser interpretado como una cartera de contratos adelantados. El ejemplo típico es el de canjes de tasa de interés, el cual se da por ejemplo cuando hay una empresa AB cuya ventaja comparativa se da en términos de tasas fijas, y otra empresa XY que la tiene en términos de tasas flotantes, sin embargo se dan condiciones de mercado donde AB tiene acceso a un préstamo con tasa flotante, y XY por el contrario, lo tiene a un préstamo con tasa fija por el mismo monto y período. En este caso ambas empresas, usualmente mediante la intermediación de una institución financiera, intercambian los flujos de pagos de intereses.

Otro tipo de canje se da en términos de divisas (currency swaps), en el cual se intercambian no sólo los flujos de pagos de intereses en base de tasa fija, sino también los pagos de capital sobre préstamos en monedas distintas en este caso.

Por ejemplo, la empresa AB se encuentra en el país A, la empresa XY en el país X, AB desea solicitar un préstamo en X, XY lo desea hacer en A. Supongamos que cada empresa tiene una ventaja comparativa en su país de origen(donde es mejor conocida, tiene mayor credibilidad, etc.), en este caso cada empresa solicita el préstamo en el mercado doméstico correspondiente por un monto equivalente y llevan a cabo un canje de divisas al trasladar los montos de pago a la contraparte.

II.3. Opciones

Las Opciones como instrumento financiero han tenido un gran auge en su utilización y desarrollo, se conocen innumerables variantes y todos los días surgen nuevas. Si bien fueron diseñadas con el fin de proveer nuevos tipos de cobertura de riesgo, en la actualidad también son utilizadas con fines de inversión y especulación. En contraposición a los Futuros, las Opciones son contratos donde el tenedor tiene el derecho pero no la obligación de comprar o vender el activo. En el caso de que se efectúe la transacción, ésta se llevará a cabo en base aun precio de ejercicio E asignado al activo, quedado dicho precio determinado en el contrato. Por otra parte, dichos compromisos tienen una determinada duración, o sea, se mantendrán válidos hasta una fecha predeterminada T, también fijada en el contrato.

Las plazas financieras más importantes para la negociación de opciones son:

- The Chicago Board Options Exchange (CBOE)
- The Philadelphia Exchange (PHLX)
- The American Stock Exchange (AMEX)
- The Pacific Stock Exchange (PSE),
- The New York Stock Exchange (NYSE),
- The London International Financial Futures Exchange (LIFFE)
- The London Stock Exchange (LSE)

De las mencionadas, la Bolsa de Filadelfia es la más importante en materia de negociaciones de divisas. En el ámbito financiero latinoamericano, la Bolsa de Valores de Sao Paulo (BOVESPA) es la de mayor importancia en materia de negociación de futuros y opciones. Sin embargo, vale la pena mencionar que el monto de transacciones para cobertura de riesgo cambiario que se maneja fuera de las Bolsas, a nivel de negociaciones directas entre instituciones financieras y empresas, en el llamado mercado over-the-counter (OTC), sobrepasan por mucho las negociaciones efectuadas en Bolsa, su ventaja es que en este mercado las opciones se pueden diseñar y negociar más a la medida de las necesidades del cliente.

En la terminología financiera usual, a una Opción de compra se le denomina *Call* y a una opción de venta se le denomina *Put*. Por otro lado, las Opciones se clasifican básicamente en dos tipos, según la modalidad de ejecución: si una Opción sólo puede ser ejecutada a su vencimiento T, se la llama Opción Europea, en cambio, si ésta puede ser ejecutada en cualquier momento a lo largo de todo el período, se le llamará Opción Americana.

Las opciones mencionadas son las modalidades básicas (también llamadas opciones vainilla), pero en los mercados financieros existe una gran diversidad en la oferta de tipos de opciones. Usualmente se diseñan diversas combinaciones de éstas que permiten cubrir riesgos para las distintas situaciones que puedan ser previstas por el cliente interesado (estrategias para coberturas de riesgo). Entre otros tipos de opciones(llamadas opciones exóticas) mencionemos algunas: las opciones asiáticas, cuyo precio depende del promedio de valores del subyacente durante un período dado; las opciones lookback, las cuales toman como parámetro el valor máximo o mínimo tomado por el precio del subyacente durante un período dado; las opciones barrera, las cuales dejan de ser válidas si el activo subyacente alcanza algún valor predeterminado antes de su vencimiento. En fin, la lista puede ser muy amplia, pero sólo se dan algunos ejemplos.

Aunque el rango de activos subyacentes es muy amplio, ya que pueden ser acciones, bonos, índices financieros y aún otros derivados, tales como futuros o swaps, en lo subsiguiente se enfatizará el estudio de opciones sobre divisas, ya que son las más relacionadas con el objetivo final de estas notas. Obviamente, el propósito de las opciones sobre divisas es cubrir a su tenedor del riesgo inherente a la volatilidad del tipo de cambio. Por ejemplo, una empresa de los E.E.U.U. que recibirá un pago en pesos mexicanos a una fecha dada T, podrá cubrir su riesgo si compra una opción de venta por el mismo monto, a un precio convenido, llamado precio de ejercicio E (en dólares americanos) y con vencimiento a la fecha T. De esta manera, la empresa se asegura de obtener al menos un tipo de cambio igual al precio de ejercicio E. Similarmente, si una empresa de México debe efectuar un pago en dólares americanos en la fecha T, ésta se cubrirá una mediante una opción de compra de un monto similar, a un precio de ejercicio E (en pesos mexicanos), la cual vencerá también en T. Nótese que en ambos casos las opciones cumplen el papel de un seguro de riesgo cambiario: ahora bien, un seguro tiene un precio o prima a pagarse, lo que nos obliga a tomar en cuenta la importancia que tiene la valuación de opciones. Este es un aspecto muy interesante pero asimismo complejo. Para valuar una opción es necesario tomar en cuenta distintos aspectos, tales como su fecha de vencimiento T, el precio de ejercicio E, la tasa de interés libre de riesgo en el mercado r y obviamente, el precio del activo subyacente S. Como existe incertidumbre sobre el comportamiento de la variable S(en nuestro caso, el tipo de cambio), al modelarlo matemáticamente se deberá utilizar un enfoque probabilístico, a fin de tomar en cuenta la variabilidad de dicho precio (volatilidad cambiaria). Se presentarán algunos elementos sobre la valuación de opciones en el capítulo siguiente.

III. VALUACIÓN DE OPCIONES

III.1 El valor intrínseco y el valor en el tiempo

El valor o prima de una opción está estrechamente relacionado a la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio del activo subyacente. De hecho, la prima refleja la probabilidad de que la opción sea ejercida por el tenedor en su beneficio, no es más que el valor esperado actualizado de la utilidad que genera, bajo el supuesto de una ley de probabilidad apropiada, ajustada al riesgo. La prima tiene dos componentes: el valor intrínseco y el valor en el tiempo (time value).

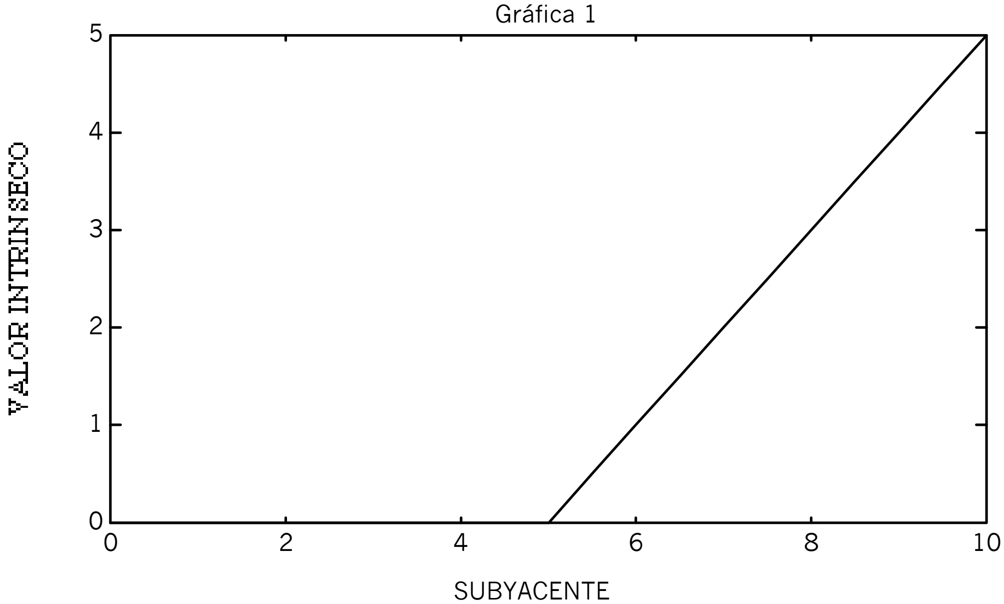
Prima = Valor Intrínseco + Valor en el tiempo

El *valor intrínseco* (VI) de una opción de compra será la diferencia positiva entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio

$$VI = \max(S-E,0) = (S-E)^{+}$$

Esto quiere decir que si el precio del subyacente es mayor que el precio de ejercicio ($S>E$), que es lo que la terminología del mundo financiero designa como opción de compra dentro del dinero (call in the money), entonces el valor intrínseco será $VI=S-E$. En caso contrario el valor intrínseco será nulo. En este caso, cuando $S<E$, se dice que la opción de compra se encuentra fuera del dinero (call out of the money); por ultimo, si $S=E$, se dice que la opción de compra se encuentra en el dinero (call at the money).

Gráfica 1

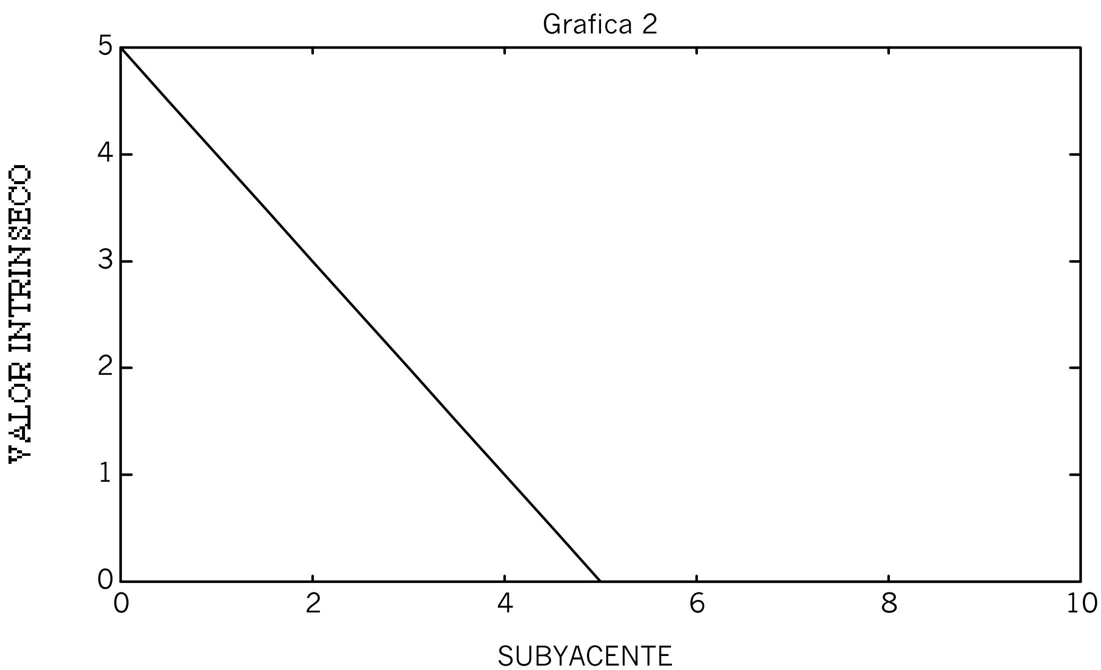


NOTA GRÁFICA 1:
En la gráfica, el subyacente se encuentra en el eje de las abscisas, el valor intrínseco en el eje de las ordenadas, el precio de ejercicio es igual a cinco ($E=5$). En el rango entre $0< S<5$, la opción de compra se encuentra fuera del dinero, en el rango $5<S$, la opción de compra se encuentra dentro del dinero y su valor intrínseco se encuentra es una función lineal del precio del subyacente S.

Por el otro lado, en el caso de una opción de venta, el valor intrínseco será la diferencia positiva entre el precio de ejercicio y el precio del subyacente, es decir:

$$VI=max(E-S,0) = (E - S)^{+}$$

Esto es, si el precio de ejercicio *E* es mayor que el precio del subyacente *S* , la opción de venta estará en el dinero (put in the money) y su valor intrínseco será $VI=E-S$. Por el contrario, si $E<S$, la opción de venta estará fuera del dinero (put out of the money) y su valor intrínseco será cero; análogamente si $S=E$ la opción de venta estará en el dinero (put at the money).



Nota GRÁFICA 2:

De nuevo asumiendo como precio de ejercicio $E=5$, la opción de venta estará dentro del dinero en el rango $0<S<5$, y fuera del dinero en el rango $5<S$.

La diferencia entre la prima y el valor intrínseco será el valor en tiempo. Es importante hacer notar que mientras el valor intrínseco solamente es función del precio de ejercicio y del precio del subyacente, el valor en el tiempo depende de otros parámetros adicionales, siendo los más importantes la duración de la validez de la opción y la volatilidad del activo subyacente.

Es importante hacer notar que en el caso de opciones europeas sobre tipos de cambio, la tasa de interés que se utiliza para calcular el valor intrínseco es la tasa "forward" y no la tasa "spot". Esto se debe a que el comprador de una opción europea solo la puede ejercer a su vencimiento, y precisamente lo que hace es comparar precio de ejercicio con el precio "forward" correspondiente.

III.2 Modelos teóricos para valuación de opciones

Como se ha mencionado repetidamente en incisos anteriores, la valuación teórica de la prima de una opción es compleja en deducir, amén de hacer numerosas hipótesis de comportamiento, incluyendo la ausencia de arbitrajes en el mercado y la estructura constante de la volatilidad del precio del subyacente. El trabajo de Fischer Black y Myron Scholes fue decisivo, al proponer el primer modelo teórico en 1973. Este modelo, ya mencionado en la introducción, ha sido la base de la gran mayoría de estudios posteriores y no pretenderemos exponerlo aquí en detalle. Trataremos en lo subsiguiente el modelo de Garman y Kohlhagen, el cual es una adaptación del modelo de Black y Scholes para el caso de opciones europeas sobre divisas.

Las hipótesis asumidas por el modelo son las siguientes:

- Las variaciones en el tipo de cambio son independientes entre períodos. La varianza de estas variaciones es proporcional al cuadrado del tipo de cambio y dichas variaciones se modelan como una variable aleatoria de distribución tipo log-normal[5].
- Las tasas de interés a corto plazo en ambas divisas son constantes a lo largo del período de validez de la opción.
- Los mercados de opciones y divisas se componen de agentes que se comportan racionalmente de manera que el mercado excluye las posibilidades de arbitraje.
- No hay costos de transacción.
- Las opciones son de tipo europeo

Es necesario hacer notar que las hipótesis propuestas no concuerdan muchas veces con la realidad; por ejemplo, usualmente la volatilidad no es constante; es más, los tipos de cambio tienden a tener períodos de alta y baja volatilidad. Sin embargo, tomando en cuenta sus limitaciones, el modelo da un punto de partida válido y éste ha sido modificado ulteriormente para tomar en cuenta hipótesis de comportamiento más realistas. Ya que las consecuencias teóricas que estos desarrollos implican no son imprescindibles para el efecto de una introducción, nos limitaremos en estas notas a presentar el modelo bajo los supuestos originales. En este caso es posible construir una cartera cuyo rendimiento es igual al del activo libre de riesgo (en este caso la tasa de interés de la divisa X). Este portafolio se obtiene vendiendo opciones de compra sobre la tasa de cambio "spot" y comprando divisas. El valor teórico de la opción de compra sobre el tipo de cambio "spot" *S* (equivalente a una opción de compra de la divisa Y y una opción de venta de la divisa X, ya que se compra Y y se paga con X) nos da el valor de la cartera de la forma siguiente:

$$C(S, T-t) = e^{-R(T-t)}SN(d_1) - e^{-r(T-t)}EN(d_2)$$

[5] Ver Apéndice

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r - R + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

donde

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

en esta fórmula se tiene:

C(S,T-t) : prima de la opción de compra sobre tipo de cambio (compra divisa Y/ venta divisa X)

S : tipo de cambio "spot"

E : precio de ejercicio

T : etapa de vencimiento de la opción

t : etapa evaluación de la opción

T-t : tiempo hasta el vencimiento de la opción (medido en múltiplos de años)

r : tasa de interés de la divisa X durante el período de validez de la opción

R : tasa de interés de la divisa Y durante el período de validez de la opción

σ : volatilidad del tipo de cambio "spot" durante el período de validez de la opción

$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-x^2/2}\,dx$: función de distribución normal acumulada

Nótese que utilizando la relación entre tasa "forward" y la tasa "spot":

$$F = S_t e^{(r-R)(T-t)} \ .$$

Se obtuvo en el capítulo anterior la relación

$$Fe^{-r(T-t)} = Se^{-R(T-t)}$$

de manera que sustituyendo en la fórmula del precio de la opción de compra esto implica:

$$C(S,T-t) = e^{-r(T-t)}(FN(d_1) - EN(d_2)) = C(F,T-t) \ ,$$

ósea , el valor de la opción de compra con base en el tipo de cambio "spot" es el mismo que para la tasa "forward".

Para el cálculo de la prima de la opción de venta *P(S,T-t)* efectuamos el siguiente razonamiento de arbitraje:

A. Se compra a futuro un activo con precio "spot" S que generará un monto F en la fecha T

B. Se compra una opción de venta ("put") y se vende una opción de compra ("call") al mismo precio de ejercicio E, ambas opciones con fecha de vencimiento T.

Si asumimos que un agente lleva a cabo las estrategias A y B, su portafolio tendrá en la etapa t el valor $\Pi(t)=S+P(S,T-t)-C(S,T-t)$. A su vencimiento en la fecha T, el valor de S coincide con el valor "forward" F ($S=F$) y los valores de las opciones coinciden con el valor intrínseco correspondiente, de manera que se tienen dos casos:

$$\text{si } F \leq E \text{ , } \Pi(T)=F+max(E-F,0)-max(F-E,0)=F+(E-F)-0=E$$

$$\text{si } F \geq E \text{ , } \Pi(T)=F+max(E-F,0)-max(F-E,0)=F+0-(F-E)=E$$

Cualquiera de ambas alternativas generará un portafolio de valor E.

Si el mercado es eficiente, en cualquier etapa t el valor del portafolio deberá ser entonces ser igual a $Ee^{-r(T-t)}$ (es decir $\Pi(t)= Ee^{-r(T-t)}$) o sea, si en el mercado no hay posibilidades de arbitraje, ambas estrategias, la inversión en la cartera Π y la inversión de un monto E en instrumentos libres de riesgo, deben ser equivalentes y generar el mismo monto en todo instante t, esto es:

$$Se^{-R(T-t)} + P(S_t, T-t) - C(S_t, T-t) = Ee^{-r(T-t)}$$

Si tomamos en cuenta la relación entre el precio "spot" y el "forward" para activos en general $S_t e^{-R(t-t)} = Fe^{-r(T-t)}$ esto implica que en toda etapa t:

$$P(S_t, T-t) = C(S_t, T-t) - (F-E)e^{-r(T-t)}$$

Esta relación es conocida como el principio de paridad de opciones de compra y venta (put-call parity), es válida para opciones europeas y permite calcular el precio de la opción de venta .

Como ejemplo de cálculo de una opción de compra, retomemos el ejemplo del capítulo anterior, en el cual se tenía una divisa X, a un tipo de cambio de 190 unidades por dólar, tasa de interés para E.E.U.U.: 6% (*R=0.06*), tasa de interés del país X: 9% (*r=0.09*), con un plazo de vencimiento:*T-t=0.5*. Asumiremos una volatilidad del tipo de cambio del 20%, (σ=*0.2*), y un precio de ejercicio *E=191*. Tenemos entonces: $d_1 = -0.32$ y $d_2 = -0.4614$, de manera que obtenemos como valores (aproximados) para la función normal acumulada:

$$N(d_1) = 0.3745 \text{ y } N(d_2) = 0.3228$$

Sustituyendo en la fórmula de Garman y Kohlhagen:

$$C(190, 0.5) = e^{-0.06*0.5} * 190 * N(d_1) - e^{-0.09*0.5} * 191 * N(d_2) = 10.1102$$

De manera que, la opción de compra de un dólar americano a 191 unidades X a seis meses plazo, dado que hoy el precio es 190 y con las tasas de interés y volatilidades dadas, tiene un valor de 10.1102 unidades de X.

Es necesario hacer notar que, en lo que respecta a la volatilidad σ del tipo de cambio, ésta refleja la variabilidad de su fluctuación a lo largo del tiempo, sin embargo, la volatilidad no es observable directamente. Usualmente se calcula un estimador de la volatilidad histórica mediante la desviación estándar de las variaciones de los logaritmos del tipo de cambio para una serie de observaciones diarias, es decir se utiliza el estimador *s*':

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) - m\right)^2}$$

En este caso:

S_t : tipo de cambio al día t

m : valor medio de la serie histórica

n : número de observaciones

El hecho de usar los logaritmos de las observaciones se debe a que, cuando la variable S_t es el precio de un activo financiero, usualmente la variable aleatoria $\ln(\frac{S_{t+1}}{S_t})$, se ajusta mejor a una distribución normal gaussiana.

De nuevo es necesario insistir que en este tipo de modelos se debe estar consciente de las posibilidades de sesgo en la evaluación de la opción. Según estudios efectuados, el modelo de Black y Scholes tiende a sobrevaluar opciones que se encuentran, relativamente hablando, muy fuera del dinero. Algo similar pasa con las opciones muy dentro del dinero, las cuales tienen tendencia a ser subvaluadas. Sesgos en la valuación de opciones también han sido detectados cuando la volatilidad del activo subyacente es muy alta.

En lo que respecta a la valuación de opciones americanas, ésta es todavía materia de investigación académica, ya que no existen fórmulas explícitas similares al modelo de Black y Scholes. Sin embargo, el hecho de que la opción pueda ejercitarse a discreción a lo largo del intervalo hace que ésta tenga un valor mayor o al menos igual que su homóloga de tipo europeo. Por otro lado, siguiendo criterios de arbitraje, es posible demostrar que, al menos en el caso de la opción de compra tipo americano, ésta tiene el mismo valor que la similar de tipo europeo, ya que la decisión óptima en este caso es esperar hasta su vencimiento para ejercerla.

En la práctica, generalmente se utilizan métodos de árboles binomiales (modelo de Cox - Ross-Rubinstein) para calcular en forma aproximada el valor de una opción americana.

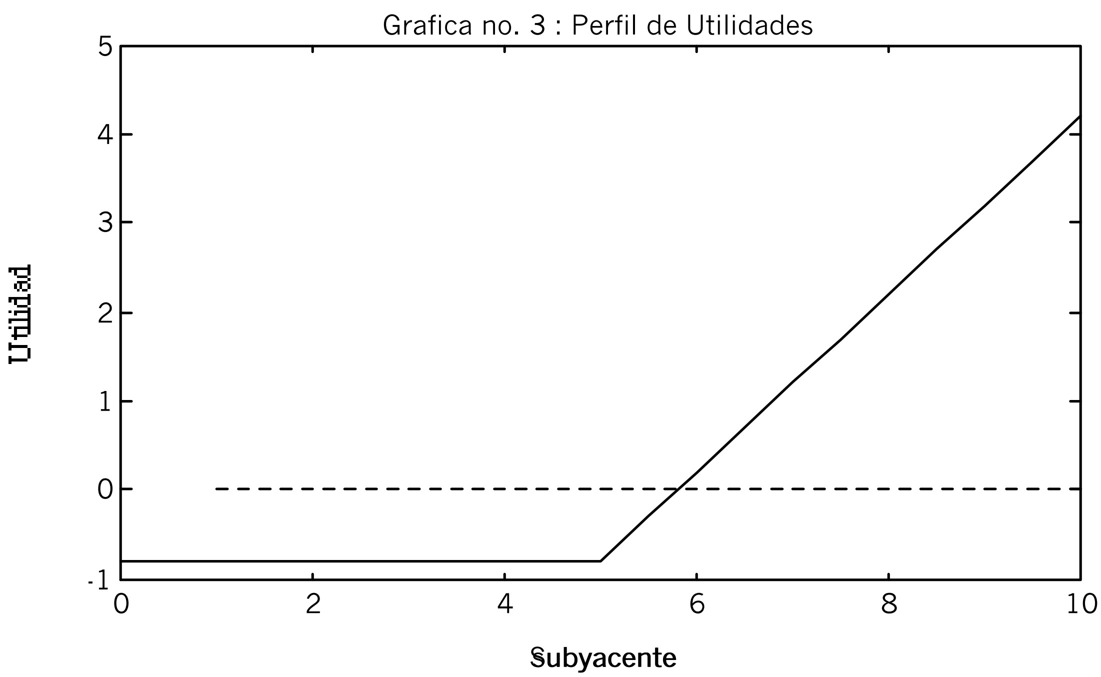
Estos son muy sencillos a implementar en computadoras, de manera que se han popularizado en el medio financiero. El modelo citado puede también ser utilizado para opciones europeas, pero en este caso el modelo de Garman y Kohlhagen sigue siendo preferible, dado que las fórmulas son relativamente fáciles de utilizar y, además, en el caso de cálculos de cobertura de riesgo, es posible calcular la sensibilidad de la prima de la opción versus diversos parámetros, tema a tratar con mayor detalle en el siguiente capítulo.

IV. ESTRATEGIAS DE COBERTURA DE RIESGO E INDICADORES DE SENSIBILIDAD DE PRIMAS.

IV.1 Perfiles de utilidad y pérdida

Comenzaremos por describir la estructura de pérdidas y ganancias que se tiene al adquirir una opción mediante el diagrama del perfil de utilidades de ésta. En el diagrama las utilidades, representadas en el eje de ordenadas, se describen como una función del precio "spot" del activo subyacente.

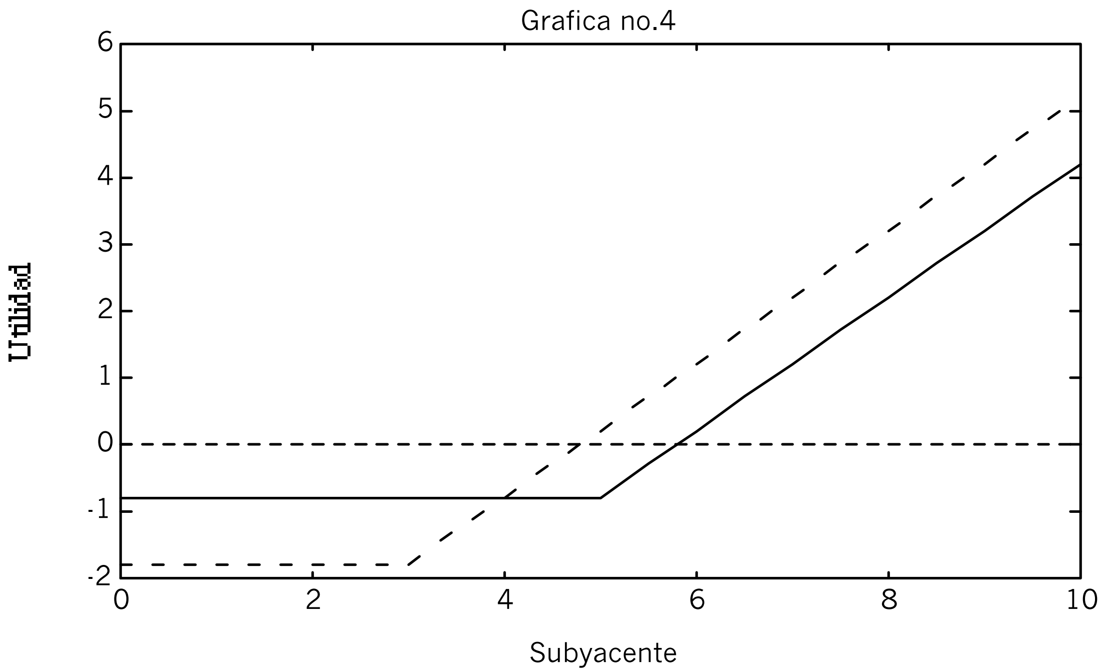
Para comenzar el estudio, analizamos el perfil de utilidades de la compra de una opción "call":



NOTA GRÁFICA 3:

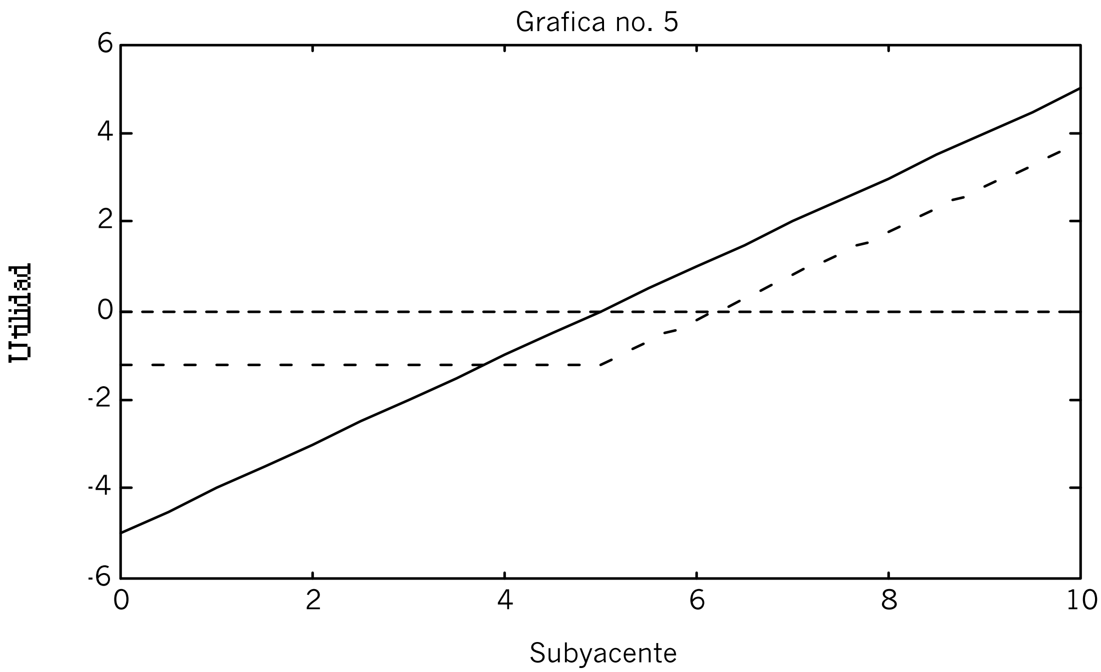
En esta gráfica se tiene el perfil de utilidades de una opción "call" con precio de ejercicio E=5 y precio de "call" C=0.8 al momento de su vencimiento.

Si el precio "spot" del subyacente es menor al punto de equilibrio, dado por la suma del precio de ejercicio más la prima de la opción (*Pto. de equilibrio=E+C*), se tiene una pérdida, la cual no puede ser mayor que el valor de la prima de la opción; de hecho, para el rango de valores del "spot" menores del precio de ejercicio E, la pérdida es constante e igual al precio de la opción. En el rango entre el precio de ejercicio y el punto de equilibrio (es decir, para $E<S<E+C$) la pérdida decrece hasta hacerse nula. Si por el contrario, el precio "spot" es mayor al punto de equilibrio, el tenedor de la opción registra una utilidad que se incrementa en forma ilimitada al aumentar el precio S.



NOTA GRÁFICA 4:
En caso de cambios en el precio de ejercicio, se puede efectuar un análisis gráfico con fines de comparación de perfiles de utilidad, por ejemplo, asumamos la compra de otra opción con precio de ejercicio *E=3* y prima de "call" *C=1.4*. Tenemos entonces los perfiles para las dos opciones al momento de vencimiento.

El análisis de perfiles de utilidad nos permite ver en forma gráfica porqué es preferible, por ejemplo, comprar una opción "call" que comprar un "forward". Analicemos el caso de una "call" con precio de ejercicio *E=5* y prima *C=1.2* y un "forward" con precio *F=5*. Es decir, se diseñan los instrumentos de manera que el precio de ejercicio de la opción y el precio "forward" sean los mismos. La finalidad es la misma, adquirir un activo a la fecha de vencimiento por un determinado precio, el cual en ambos casos será el mismo. Veremos sin embargo que los perfiles de utilidad son distintos, ya que en el caso de la compra a futuro existe una obligación de compra que no se da en la opción.



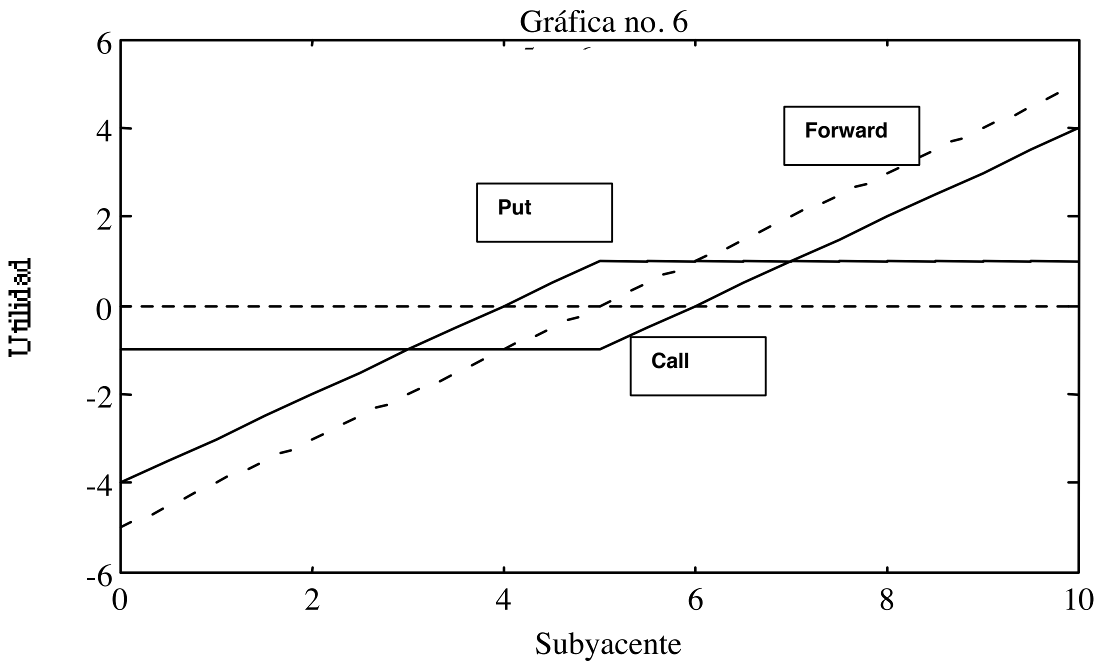
NOTA GRÁFICA 5:

Se muestra el perfil de utilidades de una compra a futuro con precio F = 5(línea continua), comparado al perfil de utilidades de una opción de compra con precio de ejercicio E = 5 y precio de la opción C = 1.2.

Del perfil de utilidades presentado en la gráfica no. 5 puede verse que, si el precio "spot" es menor que el precio "forward", se incurrirá en una pérdida, la cual será mayor en términos absolutos si se utiliza la compra a futuro, pero en el caso de utilizar la opción de compra, la pérdida nunca será mayor, en términos absolutos, que la prima del "call". De manera que la posible pérdida quedará en un rango menor. Si bien en el caso de que el precio "spot" sea mayor que el "forward" , la utilidad será mayor que en el caso de la compra de la opción "call", la decisión dependerá de las expectativas sobre el comportamiento de precio "spot" S.

Como lo habían hecho notar en su momento Black y Scholes, con la ayuda de opciones pueden a su vez "replicarse" otros instrumentos, esto es, dado un instrumento financiero con un cierto rendimiento, es posible, mediante compra y venta de diversos tipos de opciones, tanto de compra como de venta, formar portafolios de éstas que tengan el mismo rendimiento que el instrumento dado.

A manera de ejemplo, un contrato de compra "forward" puede ser replicado mediante la compra de una opción "call" y la venta de una opción "put". Es decir, si lo escribimos algebraicamente: F=-P+C. Este sería el portafolio de opciones que replica el "forward".



NOTA GRÁFICA 6:

Se compara el perfil de utilidades de un "Forward" con los perfiles de utilidades de la compra de una "Call" y la venta de una "Put", tomando el precio de ejercicio de ambas opciones igual al precio futuro: *E=F=5*. Para facilidad de representación gráfica se suponen las primas de opciones tanto como de compra como de venta: *C=P=1*.

En cierta forma, podemos afirmar que, mediante una combinación de opciones se puede crear un "forward sintético". Esto es un ejemplo de replicación de un activo financiero mediante un portafolio de opciones.

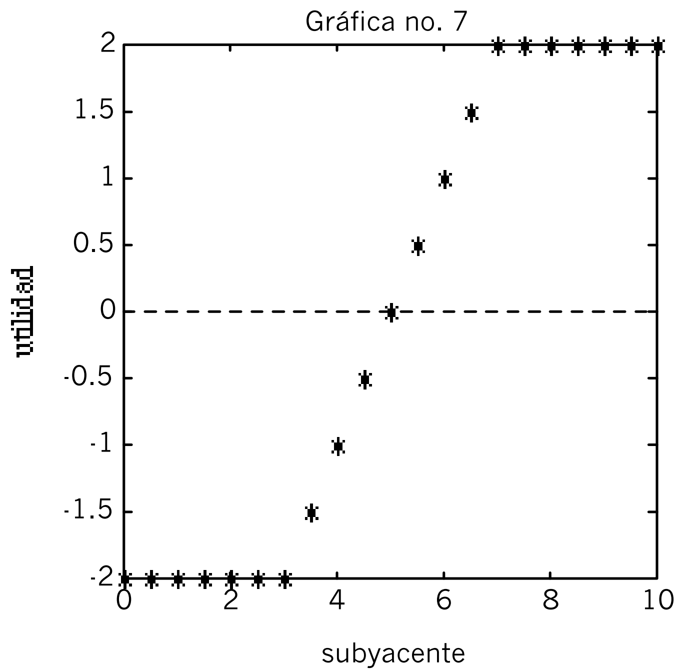
IV.2 Estrategias de cobertura de riesgo

Como se ha mencionado anteriormente, un portafolio determinado de opciones puede ser utilizado para evitar o disminuir pérdidas en determinadas condiciones de mercado que sean previstas por el agente económico. También pueden diseñarse portafolios que incrementen utilidades. En el caso que nos interesa, las opciones son instrumentos a ser utilizados para cobertura de riesgos cambiarios: al identificar un riesgo particular, se puede diseñar una combinación de opciones para su cobertura. En ese sentido, las opciones son instrumentos análogos a contratos de seguros.

Veamos a continuación algunas estrategias de diseño de carteras utilizadas como coberturas en distintas situaciones de riesgo. Es necesario hacer notar que las estrategias presentadas puede ser replicadas mediante otras combinaciones alternativas de instrumentos, es decir, no existe una alternativa única de replicación.

Bull spread:

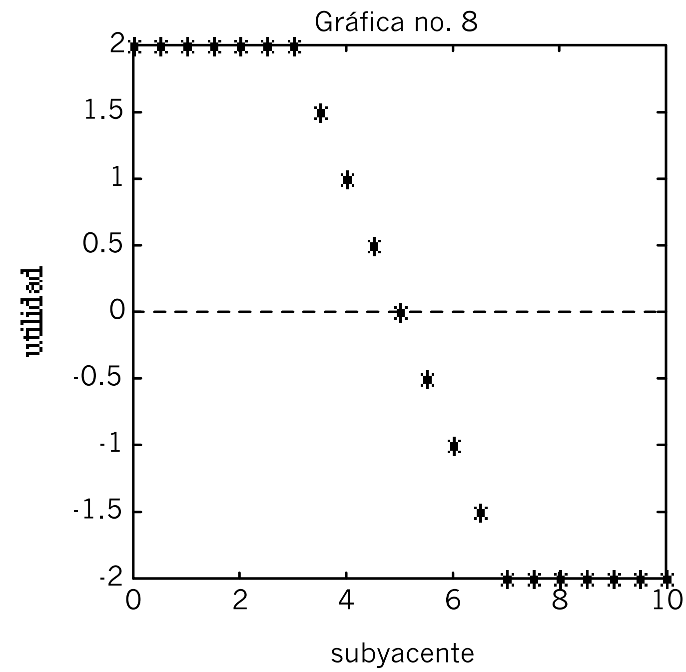
La estrategia "Bull spread" es una estrategia de tipo agresivo, en el sentido que el agente asume una tendencia al alza en el precio "spot" y trata de aprovecharla. La estrategia se puede replicar mediante la compra de una opción "call" al precio de ejercicio *A* y la venta de otra opción "call" al precio de ejercicio *B*. Se obtiene un perfil de utilidades según la gráfica no. 7.



En este caso el beneficio es limitado, siendo máximo cuando *S* es mayor que el precio de ejercicio *B* (*B=7* en el ejemplo). El punto de equilibrio será cuando *S*=*A* + *costo neto de apertura de la operación* (*A=3* en el ejemplo). Asimismo la pérdida queda limitada, siendo máxima si el precio "spot" es menor que el precio de ejercicio *A* al vencimiento.

Bear spread:

La estrategia "Bear spread" es una estrategia de tipo protector, en el sentido que el agente busca protegerse de una baja en el precio *S*. Prácticamente es la estrategia inversa de la anterior, ya que puede ser replicada mediante la venta de la opción "call" con precio de ejercicio *A* y la compra de la opción "call" con precio de ejercicio *B*, donde *A*<*B*. Si utilizamos los mismos parámetros del ejemplo anterior , tenemos la gráfica no. 8.

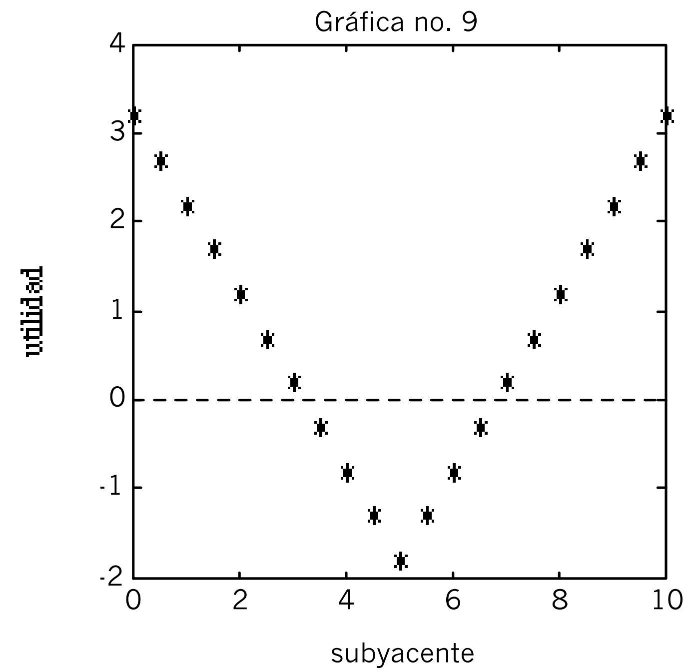


La utilidad estará acotada en este caso, siendo máxima si el precio "spot" baja de *A* al vencimiento, pero asimismo la pérdida es limitada, siendo máxima en términos absolutos si el precio "spot" del subyacente sobrepasa el valor *B* al vencimiento.

Las estrategias de cobertura presentadas asumen expectativas respecto a la tendencia, veamos ahora estrategias ligadas a expectativas respecto a la volatilidad.

Compra Straddle:

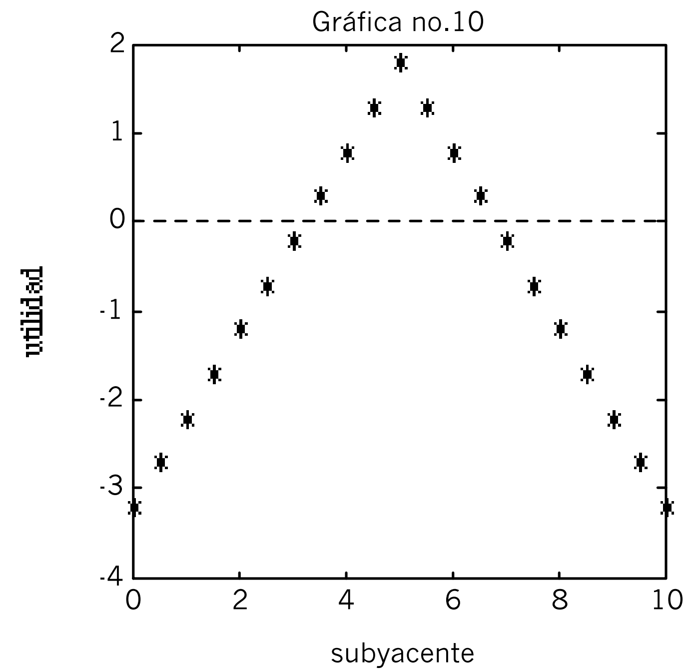
En este caso, el agente anticipa alta volatilidad sin especificar si habrá tendencia al alza o a la baja. Esta estrategia se puede replicar mediante la compra de dos opciones: una opción "call" y una opción "put" ambas con el mismo precio de ejercicio *A*. Asumiendo un precio de ejercicio *A=5,* el perfil de utilidades se observa en la gráfica no. 9.



Como puede observarse, en este caso la utilidad puede incrementarse ampliamente en ambas direcciones. El punto de equilibrio al vencimiento es igual al precio de ejercicio *A* más o menos la suma de ambas primas; la pérdida está limitada a un intervalo alrededor del precio de ejercicio *A*, siendo máximo precisamente si $S=A$ al vencimiento.

<u>Venta Straddle:</u>

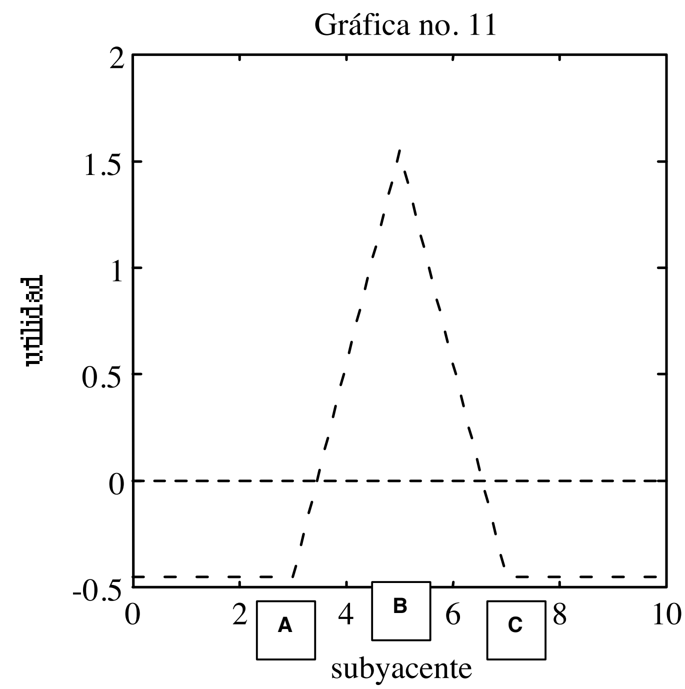
Nos encontramos aquí con la situación opuesta a la anterior, donde se anticipa estabilidad en torno del valor *A* y, consecuentemente, se presenta una baja de la volatilidad del precio "spot". En este caso la venta Straddle se replicará precisamente mediante la venta de una opción "call" y una opción "put" con precio de ejercicio *A*. Se obtendrá entonces el perfil de utilidades correspondiente con signo opuesto al de la compra Straddle(Gráfica 10).



En este caso la utilidad será máxima si al vencimiento de las opciones, el precio "spot" es igual a precio de ejercicio *A*. Dicha utilidad será igual a la suma de las primas de las opciones. Los puntos de equilibrio son los mismos de la anterior, sin embargo, en este caso las pérdidas pueden ser ilimitadas si la variable *S* crece demasiado, por lo tanto es una estrategia delicada de manejar y debe ser reexaminada si *S* se aleja demasiado del precio de ejercicio. Existe sin embargo una alternativa de estrategia, la cual presentamos a continuación.

<u>Compra Spread Mariposa:</u>

Esta estrategia se compone de la compra de una opción "call" con precio de ejercicio *A*, la venta de dos opciones "call" con precio de ejercicio *B* y la compra de una opción "call" con precio de ejercicio *C*, donde se da la relación entre precios: $A<B<C$, de manera que se tenga $B\text{-}A=C\text{-}B$. Es una estrategia de cobertura que se utiliza cuando hay expectativas de baja volatilidad, manteniéndose estable en torno del valor $S=B$.(Gráfica no. 11).



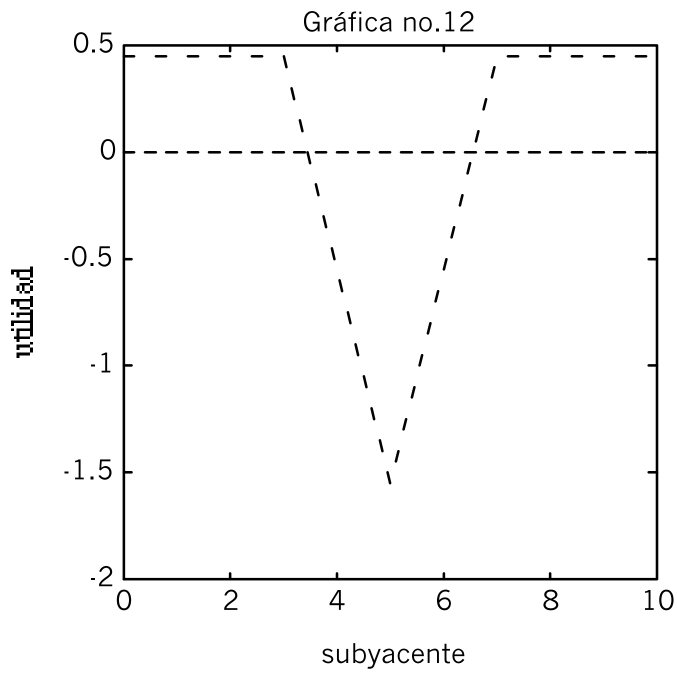
NOTA GRÁFICA 11:

Como se aprecia en la gráfica, su utilidad es limitada y se maximiza a su vencimiento cuando *S=B* (en este caso: *A=3, B=5, C=7*). La pérdida está limitada en ambas direcciones por el costo inicial de la estrategia, siendo los puntos de equilibrio *A* más costo inicial y *C* menos el costo inicial.

Es importante añadir que los portafolios de este tipo tiene cierta importancia teórica, ya que pueden ser utilizados con fines de aproximación de ciertos instrumentos abstractos utilizados en economía financiera, como son los activos de Arrow-Debreu.

Venta Spread Mariposa:

La venta mariposa es la estrategia opuesta de la anterior, siendo utilizada cuando se preveen altas volatilidades en el mercado, sin conocer la tendencia. Esta estrategia de cobertura será por tanto compuesta de la venta de una opción "call" de precio *A*, compra de dos opciones "call" de precio *B*, y la venta de una opción "call" de precio *C*, todas bajo las mismas hipótesis de la anterior.(Gráfica no. 12)



Como se puede notar a partir de las estrategias de cobertura presentadas, las posibilidades de construir un portafolio son innumerables, dependiendo de las necesidades de cada situación. Por ejemplo, las coberturas presentadas pueden a su vez ser combinadas entre sí para estructurar estrategias más complicadas; también pueden ser combinadas con contratos "forward", los cuales vimos son replicables mediante portafolios de opciones. En fin, el espectro de posibilidades es muy amplio. Nótese que por otro lado, estas estrategias de cobertura tienen sus limitantes, ya que son estrategias de tipo estático, siendo válidas solamente mientras se mantenga la situación del mercado sin cambios durante el período de validez previo al vencimiento.

Para analizar del punto de vista dinámico el comportamiento de una opción o de un portafolio de opciones es necesario utilizar otro tipo de indicadores, los cuales serán el siguiente tema de estudio.

IV.3 La sensibilidad de la prima de una opción

El valor teórico dado por el modelo de Garman y Kohlhagen para la prima de una opción de divisas depende de varios parámetros, como se ha podido constatar a partir de la fórmula dada (precio del subyacente, precio de ejercicio, tasas de interés, volatilidad, vida de la opción). El efecto de cada variable sobre el cambio de valor de la prima refleja la sensibilidad de ésta respecto a variaciones del entorno, dicha sensibilidad es indudablemente una forma de medir el riesgo inherente a la opción.

A continuación se expondrán algunos aspectos del cálculo de dicha sensibilidad. Hay que tener presente que los efectos de cada variable no son lineales, de manera que el riesgo involucrado en los cambios de valores de las variables debe ser evaluado continuamente. Los indicadores que se presentan a continuación son utilizados por los operadores de manejo de portafolios para evaluar posiciones de riesgo y diseño de estrategias , para así minimizar los costos de cobertura. Por otra parte, si bien se presentan en este estudio para el caso de una opción, estos pueden ser utilizados para análisis de sensibilidad de carteras conformadas por opciones u otros activos.

Delta

El valor Delta (Δ) describe la sensibilidad de la prima frente a variaciones en el tipo de cambio S, o sea, es igual al cociente de la variación del valor teórico de la opción entre la variación del tipo de cambio de la divisa subyacente. El hecho de tener un cociente de variaciones implica que Delta se expresa como una derivada, es decir: $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$, y en el caso especial de una opción de compra:

$$\Delta = e^{-R(T-t)} N(d_1) \; .$$

Por ejemplo, supongamos que en nuestro ejemplo de opción de compra calculado en el capítulo anterior se tiene $\Delta = 0.3580$. En este caso supongamos que el tipo de cambio sufre un incremento de veinte centavos. Entonces la prima de la opción de compra tendrá un incremento de *0.3580*0.20=0.0716* , o sea, de 7.16 centavos.

Obsérvese que la Delta puede ser interpretada como la pendiente de una curva que relacione el precio del "call" con el tipo de cambio; además, el término $N(d_1)$ expresa la probabilidad de que la opción se encuentre dentro del dinero a su vencimiento.

En general, el valor absoluto de Delta puede ser interpretado en este sentido, ya sea para opciones de compra o venta. De hecho, la sensibilidad de una opción respecto a variaciones en el tipo de cambio será mayor mientras más cercano esté el precio de ejercicio a la tasa "spot".

La Delta es utilizada ampliamente por los operadores como un indicador de cobertura, el caso usual se da cuando un agente vende opciones de venta de un activo o futuro, en este caso el emisor de la opción debe cubrirse, es decir, debe mantener en su portafolio un porcentaje del activo subyacente para eliminar las posibles pérdidas que se darían en caso de que la opción de venta fuese ejercida. Para este caso es útil tener presente que si un portafolio de valor Π consta de n activos contingentes, donde el k-ésimo activo se tiene en una proporción a_k, entonces la Delta del portafolio es una combinación de los deltas respectivos de cada componente.

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta_k$$

donde Δ_k corresponde a la Delta del k-ésimo activo contingente.

Supongamos el ejemplo siguiente: un agente compra 100 opciones de compra con precio de ejercicio 0.55 y fecha de ejercicio a tres meses, cada opción con una Delta de 0.49. Asimismo, vende 50 opciones con precio de ejercicio de 0.58 y fecha de ejercicio a dos meses con una Delta de -0.503. Entonces la Delta del portafolio de derivados será $\Delta = 100 * 0.49 - 50 * (-0.503) = 74.150$, esto significa que el agente deberá tener una disponibilidad de 74.15 unidades monetarias para cubrir sus obligaciones. Usualmente lo que se hace es incluir en el portafolio un futuro por una cantidad equivalente a la Delta del portafolio original , de manera que la Delta del portafolio total sea cero, esto es, un portafolio de tipo Delta-neutral, a esta estrategia se le denomina cobertura-Delta ("Delta hedging"), siendo ampliamente utilizada por los administradores de cartera.

Theta

El indicador Theta es una medida de la sensibilidad del valor de la opción respecto a la variación en la vida de la opción. En el caso de una opción de compra: $\Theta = -\frac{\partial C}{\partial t}$, y en el de una opción de venta: $\Theta = -\frac{\partial P}{\partial t}$.

Es posible inferir que, bajo el supuesto que todos los otros parámetros permanezcan constantes, el valor de la opción decrece en función del tiempo, de hecho, lo que decrece es el valor en el tiempo (time value), ya que el valor de la opción está acotado inferiormente por el valor intrínseco; o sea, lo que describe Theta es la depreciación de la opción en el tiempo. Mientras más cercana se encuentra la opción de su vencimiento, mayor es el valor absoluto de Theta, es decir mientras más se acerca la fecha de vencimiento, más rápido se deprecia la opción. Por ejemplo, supongamos que en dos semanas una opción se ha depreciado en veinte centavos, es decir, se tiene un valor aproximado de Theta.

$$\Theta = -\frac{\Delta C}{\Delta t} = -\frac{0.20}{0.0411} = -4.8662$$

Hay que tomar en cuenta que el incremento de tiempo Δt se encuentra en múltiplos de año, de manera que para transformar el valor calculado a un valor diario se calcula.

$$\textit{Depreciación diaria} = \frac{-4.8662}{365} = -0.0133205$$

Es decir, por cada día que transcurre, la prima de la opción se deprecia aproximadamente 1.33 centavos.

Vega

Vega se define como la derivada del valor de la opción respecto a la volatilidad del subyacente. Es decir, se tiene para el caso de una opción de compra.

$$\upsilon = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

Para una opción de venta.

$$\upsilon = \frac{\partial P}{\partial \sigma}.$$

Ósea:

$$\upsilon = S\sqrt{T-t}\,N'(d_1)e^{-R(T-t)}$$

En la práctica, la volatilidad varía con el tiempo, de manera que el valor del activo derivado está sujeto a cambios tanto por variaciones en la volatilidad como al transcurrir el tiempo. De hecho, la componente del valor en el tiempo ("time value") del valor de la opción es la única afectada por variaciones en la volatilidad. El valor de Vega es mayor mientras más cercana se encuentra una opción a estar exactamente en el dinero ("at the money"), ya que es en esa situación cuando el valor en el tiempo es máximo; o sea, es cuando una variación de la volatilidad puede afectar más. En general, si la Vega es una cantidad alta en términos absolutos, el valor de la opción o el portafolio correspondiente es muy sensible respecto a pequeños cambios en la volatilidad. Por el contrario, si la Vega es baja en términos absolutos, la prima no se verá muy afectada, tal será el caso cuando el valor del subyacente se encuentre alejada del precio de ejercicio, es decir, cuando la opción se encuentre dentro o fuera del dinero en forma acentuada. Por otra parte, como se puede inferir de la fórmula dada, mientras más largo es el período de validez, mayor es el valor de Vega.

3.3.4 Gamma

El valor Gamma es la razón de cambio de Delta al variar el precio del subyacente S, en términos matemáticos:

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$$

Más específicamente, en el caso de una opción de compra:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

y en el caso de una opción de venta:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}.$$

Gamma describe la sensibilidad de la Delta, o sea, que tan rápido se incrementa o decrece la Delta de la opción al variar el precio del subyacente. Cuando se realizan coberturas utilizando las llamadas estrategias Delta-neutral, es muy útil tener una idea de la sensibilidad de la Delta, ya que si Gamma es pequeño, quiere decir que la Delta cambia despacio y los ajustes para mantener la cobertura Delta-neutral no tendrán que ser frecuentes. En el caso contrario, esto implica que el no efectuar a menudo ajustes en la estrategia de cobertura es altamente arriesgado.

Obsérvese que al efectuar el cálculo explícito:

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)e^{-R(T-t)}}{S\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$$

ósea, Gamma mide la variación de $N(d_1)$ respecto a variaciones de S.

Rho

El indicador rho es la razón de cambio del valor de la opción respecto a la variación de las tasas de interés. En el caso de divisas, tenemos dos tasas de interés: la doméstica y la foránea, de manera que, para el caso de la tasa de interés doméstica se tiene en el caso de una opción, ya sea de compra o de venta:

$$rho = \frac{\partial C}{\partial r} = E(T - t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

Por el otro lado, en el caso de la tasa foránea R, la rho correspondiente a una opción europea de compra es dada por:

$$rho = -(T - t)SN(d_1)e^{-R(T-t)}$$

mientras que para una opción europea de venta se tiene:

$$rho = (T - t)SN(-d_1)e^{-R(T-t)}$$

Sin embargo, este indicador no es utilizado tan ampliamente como los previos, ya que a menudo los valores de rho no son significativos.

Como se mencionó al principio, los indicadores estudiados miden la sensibilidad de la prima de la opción respecto a las variaciones de distintos parámetros, su evaluación continua permite modificar las estrategias de cobertura de riesgo. Sin embargo, en el caso de portafolios de inversión, los indicadores pueden perder relevancia, sobre todo si el portafolio contiene muchos instrumentos con distintas plazos de vencimiento. El uso de otro tipo de indicadores para un análisis de riesgo financiero desde una perspectiva mas global es otro tema a discutir.

V. EL ANÁLISIS GLOBAL DE RIESGO FINANCIERO

V.1 ¿Cómo clasificar y medir el riesgo financiero?

Como se ha podido inferir de la discusión efectuada en los capítulos previos, una de las funciones del mercado en este contexto es asignarle un precio al riesgo. Sin embargo, aún si asumimos un mercado en equilibrio, en el cual todo riesgo se vea asignado su precio, cada agente preferirá cierto tipo de riesgo, dependiendo de su aversión a éste. La administración del riesgo concierne en primer término, a la selección del tipo de riesgo al que un agente prefiere estar expuesto (diversificación de portafolio), y, por el otro lado, ante cual tipo de riesgo desea estar protegido (risk-inmunization). La administración de riesgo busca entonces estimar en forma cuantitativa el riesgo de cada activo para así poder construir los portafolios de inversión adecuados. La cuantificación del riesgo se lleva a cabo mediante la estimación de volatilidades, siendo ésta la parte medular del análisis mencionado; es necesario enfatizar sin embargo que las técnicas cuantitativas utilizadas aún no constituyen un capítulo cerrado. De hecho, aparte del método usual de estimaciones estadísticas mediante promedios de datos históricos, en los últimos años se han desarrollado métodos alternativos utilizando diversas técnicas matemáticas, como el método de volatilidad implícita o los modelos de volatilidad estocástica. Estos métodos se encuentran fuera del alcance introductorio de estas notas, pero gradualmente se verán incorporados en los paquetes informáticos utilizados en la industria financiera.

Del punto de vista operativo, una alternativa para clasificar los distintos factores de riesgo puede ser la siguiente:

1. Riesgo de mercado: Entendemos como riesgo de mercado aquel que depende de los movimientos de índices de mercado. Su efecto en los rendimientos de los activos ha sido modelado por Sharpe y otros autores mediante el ya mencionado Capital Asset Pricing Model (CAPM). Otra forma de medirlo, al menos en mercados de instrumentos de renta fija sería mediante los movimientos de las tasas de interés en el mercado.
2. Riesgo de volatilidad: Este es el observado en el estudio de opciones, ya que su valor refleja el comportamiento de la volatilidad. Mientras más volátil es un mercado, más alto es el precio de una opción. Se observan también efectos del riesgo de volatilidad en el estudio de las curvas de rendimiento de bonos.
3. Riesgo sectorial: Este se origina en el comportamiento de un tipo de activos definidos bajo algún denominador común y tomados en su conjunto. Dicha agrupación de activos se hace tomando en cuenta factores que afectan a la entidad o conjunto de entidades que emiten estos activos. El ejemplo típico sería el conjunto de obligaciones emitidas por el gobierno de un país (bonos, certificados del Tesoro, etc.)
4. Riesgo cambiario: Es el originado por fluctuaciones en los tipos de cambio. Puede reflejar otro tipo de riesgos que se dan en el mercado internacional, así como riesgos inherentes al país emisor de la divisa, ya sea de tipo económico, financiero o aún político.
5. Riesgo de crédito: Es el riesgo generado por la credibilidad de un prestatario o emisor de una obligación financiera. Se ve descrito en las clasificaciones publicadas por empresas dedicadas a la evaluación de dichos agentes. La credibilidad del emisor de un bono puede afectar su precio, o la situación financiera de una empresa afecta su disponibilidad de pago de obligaciones contraídas.
6. Riesgo de liquidez: Este se genera sobre todo en el caso de entidades que hacen negociaciones de portafolio con frecuencia, ya que en algún momento una estrategia de inversión o una variación en las condiciones del mercado puede redundar en bajas de liquidez.
7. Riesgo operacional: Se trata en este caso del riesgo generado por errores de negociación, de procedimientos, y por otro lado los riesgos legales o regulatorios.

Es obvio que la clasificación presentada no es exhaustiva, ya que muchos movimientos generados en el mercado pueden originarse por la interacción de varios de los factores de riesgo enumerados. Por otro lado, el análisis de los factores de riesgo puede facilitar información que explique el grado de correlación existente entre distintos activos y permitir una toma de decisiones mas adecuada. La teoría clásica de diversificación de portafolios busca seleccionar una combinación de activos de manera a minimizar el riesgo, pero es importante tomar en cuenta que el modelo clásico se utiliza en un contexto estático, por lo que es necesario buscar nuevas ampliaciones del modelo. El objetivo de los instrumentos derivados, como se ha podido inferir de lo presentado, es de presentar alternativas de cobertura de riesgo en un marco de referencia donde el comportamiento dinámico de los precios y el riesgo del mercado son modelados explícitamente, obteniendo estrategias más eficientes. Por otro lado, se ha mencionado asimismo la necesidad de medir el riesgo de mercado mediante indicadores, lo cual es factible al menos para ciertos elementos de la clasificación presentada.

V.2 La metodología de Valor en Riesgo (VeR)

En el ámbito académico se han desarrollado en la actualidad metodologías alternativas que tratan de ofrecer otro tipo de respuestas a las inquietudes mencionadas al final del capítulo anterior. Estas son objeto de intensa investigación últimamente y vale la pena dar a conocer aunque sea en forma sucinta la metodología de Valor en Riesgo, (Value at Risk -VaR-), la cual ha comenzado a estar en boga durante los últimos años. El interés que ha despertado en los profesionales del área es que permite evaluar el riesgo en base de un indicador de tipo más global. Lo que este indicador persigue es medir cuantitativamente la sensibilidad de la posición del portafolio de una entidad financiera, la cual se mide en términos de la exposición al riesgo de la cartera de inversiones de la entidad.

Existen en la actualidad paquetes informáticos ya comercializados por diversas instituciones (el paquete RiskMetrics™ de la empresa J.P. Morgan es probablemente el más conocido) y prácticamente han alcanzado el nivel de estándares industriales. Hay que señalar sin embargo que, si bien la utilización de un sólo indicador puede parecer atractivo a nivel de toma de decisiones, el hecho de calcular un sólo indicador puede conducir a sobresimplificaciones extremas, las cuales pueden conducir fácilmente a errores de juicio en el caso de que el usuario de la información no esté familiarizado con los múltiples aspectos y complejidades de los riesgos financieros.

Una vez efectuados estos señalamientos, definimos el Valor en Riesgo (VeR) como la máxima pérdida potencial de un portafolio, bajo un nivel de confianza predeterminado. En otras palabras, dado en la etapa t un portafolio de valor $\Pi(t)$, el Valor en Riesgo es lo que éste puede perder durante el intervalo de tiempo [0, t] bajo una determinado valor de probabilidad p. En términos matemáticos, si la variación del valor del portafolio de inversión está dada por la diferencia: $\Pi(0)$- $\Pi(t)$ entonces el indicador Valor en Riesgo (*VeR*) deberá cumplir la siguiente desigualdad:

$$P(\Pi(0) - \Pi(t) > VeR) = p$$

En la práctica, lo usual es tomar un valor $p=0.05$, sin embargo, no existe un acuerdo universal al respecto; por ejemplo, el Banco de Pagos Internacionales (Bank for

International Settlements-BIS-) de Basilea propone un valor de *p=0.01***.** De manera similar, no hay una estandarización en lo concerniente al horizonte de tiempo, aunque algunos organismos proponen un horizonte de dos semanas como adecuado. Muchas empresas utilizan la medición del *VeR* sobre una base diaria.

Una interpretación heurística del indicador *VeR* sería la siguiente: dicho valor es el monto de pérdida que podría esperarse una vez al mes, si todas las condiciones del mercado y del portafolio de inversiones se mantienen constantes. Por ejemplo, si el valor obtenido fuese *VeR*=10, se esperaría que el portafolio correspondiente pierda un 10% de su valor una vez en quince días.

En el caso de un sólo activo, el valor de VeR será igual a la magnitud de la tasa de variación del valor del activo respecto a la variación del factor de riesgo (posiciones de riesgo) multiplicado por un múltiplo de la desviación estándar correspondiente al nivel de probabilidad requerido. Por ejemplo, en el caso de una opción, si identificamos las variaciones de riesgo como las variaciones de precio del subyacente, lo que se obtiene es el factor $\frac{\partial \Pi}{\partial S} = \Delta$ como posición de riesgo, de manera que se tendría para el caso *p=0.05* **:** $VeR = 1.65\Delta\sigma$ donde el parámetro σ indica la desviación estándar correspondiente a la variable S; o sea, lo que en este caso el indicador *VeR* refleja no es más que el valor del percentil correspondiente a una probabilidad del 95 %.

En el caso de más de un activo en el portafolio, el cálculo del indicador será más elaborado. Asumiendo N activos, se tiene un vector de N posiciones de riesgo y será necesario representar las volatilidades de riesgo mediante una matriz V de varianzas y covarianzas, de manera que en ese caso se obtiene: $VeR = -z\sqrt{\delta^T V \delta}$, donde δ es el vector de posiciones de riesgo, δ^T el vector transpuesto, z es el valor a utilizar como múltiplo del factor de volatilidades, el cual depende de la probabilidad requerida.

Es necesario enfatizar que el VeR es meramente una medida relativa, es decir, el riesgo de un portafolio en un entorno con una estructura de mercado y una volatilidad dada se mide respecto al riesgo de otro portafolio, el cual se encontrará dentro de otro mercado con sus características propias.

Por otra parte, el modelo estadístico subyacente al cálculo del *VeR* asume que los incrementos de precios se comportan como variables aleatorias de tipo normal-gaussiano, con varianzas constantes a lo largo del período (o sea, se asumen condiciones de homoscedasticidad del mercado). Esta hipótesis simplifica en extremo el modelo, ya que si bien asumir dicho comportamiento podría ser válido para determinados instrumentos y en determinadas circunstancias, no puede ser el caso general. Las volatilidades tienden a ser inestables por períodos (heteroscedasticidad del mercado), y de la misma manera las correlaciones pueden no ser constantes. Todo esto motiva una activa labor de investigación en lo relativo a la estimación de las volatilidades, distintas metodologías surgen como alternativas: simulación de Monte-Carlo, modelos autorregresivos, modelos de Delta de portafolio, etc. En la actualidad, este campo se encuentra en una situación donde tanto los resultados teóricos como las metodologías disponibles todavía no son definitivos.

VI. APENDICE: Fundamentos matemáticos

VI.1. Capitalización continua

En el marco de la teoría financiera moderna, lo usual es considerar un modelo de capitalización continua, es decir, el cálculo de la capitalización mediante interés compuesto se lleva a cabo asumiendo que el período de capitalización es cada vez más pequeño. O sea, si tenemos una tasa de interés nominal anual *r* y se deposita una cantidad C_0, al transcurrir *m* períodos (ya sean meses, semanas, días) se genera un monto *C* dado por:

$$C = C_0\left[1 + \left(r/m\right)\right]^m$$

Al componer intereses en forma continua, la fórmula a utilizar será:

$$C = C_0 e^{rT}$$

donde *T* designa la longitud del intervalo completo de inversión, y *e* =2.7818.. denota la constante de Euler, base de los logaritmos naturales.

VI.2. Elementos sobre teoría de probabilidades

Como se ha podido observar de la discusión presentada, los precios son modelados matemáticamente como variables aleatorias. El comportamiento de éstas es descrito mediante las así llamadas funciones de densidad de probabilidades. Por ejemplo, si asumimos que la variable aleatoria *X* puede tomar su valor sobre un número finito de valores disponibles $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, entonces podemos escribir la función de densidad de probabilidades como $p(x_i)$, ésta representa la probabilidad de que la variable aleatoria *X* tome el valor x_i, es decir, $p(x_i) = prob\,(X = x_i)$. Dicho valor será siempre no-negativo para todo x_i y además $\sum p(x_i) = 1$.

Si la variable aleatoria *X* puede tomar un valor ξ sobre un intervalo continuo de números reales, entonces la función densidad *p(*ξ*)* se interpreta en términos de diferenciales como:

$p(\xi)d\xi = prob\,(\xi \leq x \leq \xi + d\xi)$.

La distribución acumulada de probabilidad de la variable aleatoria *X* es la función *F(*ξ*)* , la cual se define como $F(\xi) = prob\,(X \leq \xi)$. Nótese que en el caso de que la variable aleatoria X tome su valor sobre un intervalo continuo, entonces la derivada de la distribución acumulada *F* será igual a la función densidad, es decir : $\frac{dF}{d\xi} = p(\xi)$

Estas propiedades permiten definir el valor esperado de X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p(\xi) d\xi = \mu$$

así como la varianza de X:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)^2 p(\xi) d\xi = \sigma_X^2$$

y en el caso de dos variables aleatorias X e Y, la covarianza de *X* e *Y*:

$$\sigma_{X,Y} = \mathrm{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)(\eta - \nu) p(\xi, \eta) d\xi$$

donde $p(\xi,\eta)$ describe la llamada función de densidad conjunta para ambas variables aleatorias *X* e *Y*.

De manera más general puede definirse la matriz de varianzas y covarianzas de X e Y:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_X^{\ 2} & \sigma_{X,Y} \\ \sigma_{X,Y} & \sigma_Y^{\ 2} \end{pmatrix}$$

Este tipo de matrices puede ser generalizado para el caso de un mayor número de variables aleatorias.

VI.3. Variables aleatorias normales

Una variable aleatoria X con valor esperado m y varianza σ^2 es de tipo normal o gaussiana si la función de densidad correspondiente es de la forma

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Para el caso μ=0 y σ^2=1 se tiene el caso especial de una variable normalizada siendo la función de distribución normal acumulada correspondiente:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

Un caso especial de mucha importancia para el análisis de precios como variables aleatorias es cuando la variable *ln Z* es de tipo normal. Se dice en este caso que Z es una variable de tipo lognormal. De manera equivalente, si X es normal, entonces $Z = e^X$ es lognormal. Se tienen entonces las siguientes propiedades:

$$E(\ln Z) = \nu, \qquad E(Z) = e^{(\nu + \sigma^2/2)}$$

$$Var(\ln Z) = \sigma^2, \qquad Var(Z) = e^{(2\nu+\sigma^2)(e^{\sigma^2}-1)}$$

En muchos casos relevantes, el comportamiento de los precios se modela asumiendo que éstos son variables aleatorias de tipo lognormal.

VI.4. Procesos aleatorios

Un proceso aleatorio o estocástico $\{S_t : t \in T\}$ es una familia de variables aleatorias, donde usualmente el subíndice *t* indica una etapa en el tiempo y S_t representa el estado del proceso en el tiempo. En el caso que nos interesa, el proceso S_t describe la evolución del precio de un activo.

Diremos que el proceso aleatorio $\{W_t : t \geq 0\}$ es un movimiento brownniano si cumple las siguientes propiedades:

1. W_t es continuo y $W_0 = 0$
2. En cada etapa *t*, el valor de W_t es una variable aleatoria de tipo normal con valor esperado nulo y varianza igual a *t*.
3. Para toda pareja de intervalos de tiempo disjuntos $[t_1, t_2], [t_3, t_4]$, los incrementos correspondientes $W_{t_4} - W_{t_3}, W_{t_2} - W_{t_1}$ son variables aleatorias independientes entre sí, distribuidas normalmente.

Las hipótesis esenciales para el modelo de proceso de precios es que éstos se comportan como variables aleatorias tipo lognormal , por otro lado, que los incrementos $\ln S_{t+s} - \ln S_t$ sean variables aleatorias de tipo normal-gaussiano con valor esperado νt y varianza $\sigma^2 t$. En este caso, al proceso aleatorio correspondiente $\{S_t\}_{t \in T}$ se le denomina un movimiento brownniano geométrico.

Para efectos de cálculo del valor esperado en cada etapa *t* se tiene:

$$E[\ln S_t] = E[\ln S_0] + \nu t \quad ,$$

o en forma equivalente:

$$E[S_t] = S_0 e^{\left(\nu + \sigma^2/2\right)t} \quad .$$

y además, para el caso de la varianza:

$$Var(\ln(S_t / S_0)) = \sigma^2 t \quad .$$

En otras palabras, se asume que la variable de precios S_t, se modela mediante: $S_t = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t)$, donde W_t es un movimiento brownniano.

Según se ha podido apreciar en observaciones estadísticas, el modelo mencionado anteriormente se ajusta razonablemente al comportamiento de precios de activos financieros.

Otra definición útil en los modelos financieros es la de los procesos aleatorios conocidos como martingalas. Un proceso S_t es una martingala si el valor esperado en una etapa *j* , condicionado al conocimiento de la historia del proceso hasta la etapa *i* , es precisamente el valor observado en dicha etapa *i*. En forma matemática se enuncia: $E(S_j | F_i) = S_i$, para toda etapa $i \leq j$. La información conocida hasta la etapa *i* es representada por F_i .

Es necesario hacer notar que, en este caso, el valor esperado es calculado mediante una medida de probabilidad específica (medida de probabilidad neutral al riesgo), la cual no necesariamente será la probabilidad observada. En esta situación se trata de una medida de probabilidad construida específicamente para el análisis de valuación de opciones, sin embargo, se demuestra que ésto será posible si y sólo si el modelo de mercado financiero propuesto excluye las posibilidades de arbitraje.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Díaz Tinoco, J. y Hernández Trillo, F. *Futuros y Opciones Financieras. Una introducción*. Limusa-Bolsa Mexicana de Valores (1998)

Duffie, D. and Jun Pan, *An Overview of Value at Risk*, The Journal of Derivatives, Spring ,1997

González de Paz, R. B., *Precios, Dinero e Incertidumbre,* Revista Banca Central (Banco de Guatemala), 1996

Haugen, R., *Modern Investment Theory*, Prentice-Hall, (1997)

Hull, J. *Options, Futures, and other Derivative Securities,* Prentice-Hall , 2nd. Edition (1993)

Milne, F. *Finance Theory and Asset Pricing* , Oxford University Press (1995)

Seco, L. *The Mathematics of Financial Risk Management, (Course notes)* University of Toronto-SIAM (1998)

Treynor. J. *Remembering Fischer Black*, The Journal of Portfolio Management, Special Issue -1996

El **CENTRO DE ESTUDIOS MONETARIOS LATINOAMERICANOS** fue fundado en 1952 por siete bancos centrales de América Latina, a saber: Banco de la República (Colombia), Banco Nacional de Cuba, Banco Central de Chile, Banco Central del Ecuador, Banco de Guatemala, Banco Central de Honduras y Banco de México, S. A. Actualmente, son miembros de la institución los bancos centrales y entidades de supervisión bancaria de América Latina y el Caribe, bancos centrales extrarregionales, así como otras entidades financieras de la región. La lista completa se detalla en la contraportada. En los campos monetario, financiero y bancario el **CEMLA** realiza investigaciones, organiza reuniones y seminarios internacionales sobre problemas operativos y técnicos, recoge experiencias que sistematiza por medio del diseño y administración de programas de capacitación y de asistencia técnica que contribuyen a la formación y actualización de los funcionarios de sus miembros asociados y colaboradores.

Uno de sus objetivos es informar sobre la evolución del pensamiento económico dentro y fuera del área latinoamericana, y difundir los hechos de importancia regional e internacional en materia de políticas monetaria, bancaria, cambiaria y fiscal. Sus libros, revistas y boletines contienen un vasto material de estudio y constituyen una permanente fuente de información para los estudiosos de estos temas.

MIEMBROS DEL CEMLA

ASOCIADOS

Banco Central de la República Argentina
Centrale Bank van Aruba
Central Bank of the Bahamas
Central Bank of Barbados
Central Bank of Belize
Banco Central de Bolivia
Banco Central do Brasil
Cayman Islands Monetary Authority
Banco de la República (Colombia)
Banco Central de Costa Rica
Banco Central de Cuba
Banco Central de Chile
Banco Central del Ecuador
Banco Central de Reserva de El Salvador
Banco de Guatemala
Bank of Guyana
Banque de la République d'Haï ti
Banco Central de Honduras
Bank of Jamaica
Banco de México
Bank van de Nederlandse Antillen
Banco Central de Nicaragua
Banco Nacional de Panamá
Banco Central del Paraguay
Banco Central de Reserva del Perú
Banco Central de la República Dominicana
Centrale Bank van Suriname
Central Bank of Trinidad and Tobago
Banco Central del Uruguay
Banco Central de Venezuela
Eastern Caribbean Central Bank

COLABORADORES

Bancos centrales

Deutsche Bundesbank (Alemania)
Bank of Canada
Banco de España
Federal Reserve System (Estados Unidos)
Banque de France
Banca d'Italia
Bank of Japan
Bangko Sentral ng Pilipinas
Banco de Portugal

Organismos supervisores de entidades financieras

Ministry of Finance (Anguilla)
Superintendencia de Bancos y Entidades Financieras (Bolivia)
Superintendencia Bancaria (Colombia)
Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras (Chile)
Superintendencia de Bancos (Ecuador)
Superintendencia del Sistema Financiero (El Salvador)
Superintendencia de Bancos (Guatemala)
Comisión Nacional de Bancos y Seguros (Honduras)
Financial Services Commission (Islas Turks y Caicos)
Financial Services Department (Islas Vírgenes Británicas)
Comisión Nacional Bancaria y de Valores (México)
Superintendencia de Bancos y de otras Instituciones Financieras (Nicaragua)
Superintendencia de Bancos (Panamá)
Superintendencia de Banca y Seguros (Perú)
Comisión de Instituciones Financieras (Puerto Rico)
Superintendencia de Bancos (República Dominicana)
Superintendencia de Bancos y otras Instituciones Financieras (Venezuela)

Otras instituciones

Banco de la Nación Argentina
Banco Nacional de Fomento (Ecuador)
Asociación de Banqueros de México, A. C.
Banco Centroamericano de Integración Económica.
Banco Latinoamericano de Exportaciones, S. A.
Fondo Financiero para el Desarrollo de la Cuenca del Plata
Fondo Latinoamericano de Reservas