SERIE CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN
NÚM. 48
JULIO 1999

UNA REVISION DE LA TEORIA DE INSTRUMENTOS DERIVADOS DESDE LA PERSPECTIVA DE LA BANCA CENTRAL

RAÚL B. GONZALEZ DE PAZ

En la Serie "Cuadernos de Investigación" del CEMLA se presentan avances y resultados preliminares de investigaciones, experiencias y discusiones sobre temas financieros, monetarios y bancarios, algunos de los cuales corresponden a ponencias presentadas en reuniones especializadas de bancos centrales y organismos de supervisión bancaria. El principal objetivo de la publicación es difundir estos trabajos entre los investigadores, funcionarios y técnicos de las instituciones miembros del CEMLA, así como de las personas interesadas en la materia, en el entendido que las opiniones expresadas son responsabilidad exclusiva de los autores y no comprometen a las instituciones en que trabajan, ni al CEMLA. Cabe aclarar que los documentos presentados en estos cuadernos no se han sometido a la revisión editorial que el CEMLA aplica a sus publicaciones. Dado el carácter preliminar de estos trabajos se fomenta la elaboración de comentarios y sugerencias, las que pueden enviarse a la página del CEMLA en Internet (http://www.cemla.org) con atención a Edwin Rivera Lamsick.

ÍNDICE

Una revisión de la teoría de los instrumentos derivados desde la perspectiva de la Banca Central

*Dr. Raúl B. González de Paz**

I. INTRODUCCIÓN

La utilización creciente de los llamados instrumentos financieros derivados en los mercados financieros internacionales ha tenido consecuencias aún difíciles de evaluar en su amplitud y profundidad. Para tratar de entender esta evolución en la estructura de las transacciones financieras, una serie de elementos teóricos de la microeconomía moderna y de herramientas del área cuantitativa es utilizada actualmente en el marco de la economía financiera. Los modelos desarrollados para el efecto han sido objeto de atención, tanto por los académicos como por los especialistas involucrados en la práctica. Dado el gran incremento de riesgo e incertidumbre imperante en los mercados, la finalidad primera de instrumentos como los futuros y las opciones, tanto de compra como de venta, de acciones, divisas y otros activos financieros fue precisamente elaborar carteras de activos con fines de diversificación y cobertura de riesgo.

Actualmente, la implementación y desarrollo de programas computacionales para cálculo y simulación del comportamiento dinámico de los precios de activos financieros, la optimización en el diseño de portafolios de inversión, la estimación de indicadores de riesgo financiero y otros temas afines son sujeto de estudio por parte de universidades e instituciones financieras. Sin embargo, hasta la fecha los estudios orientados a posibles aplicaciones de interés para Banca Central no hacen más que comenzar. Es claro que del punto de vista de dichas instituciones, el efecto de estos instrumentos dentro el entorno macrofinanciero ha cobrado una gran importancia. Por otro lado, las técnicas de análisis de riesgo desarrolladas dentro del marco teórico de los instrumentos derivados se han revelado como de gran utilidad en contextos más generales. La creciente volatilidad del entorno financiero a nivel global y la necesidad de estudiar como administrar e identificar los distintos tipos de riesgo que enfrentan

* El autor es Consultor del Banco de Guatemala y Profesor visitante de la Maestría de Economía del Instituto Tecnológico Autónomo de México

las instituciones financieras en la actualidad hace urgente e imprescindible un profundo esfuerzo de investigación e involucramiento en el área por parte de Bancos Centrales y entidades supervisoras.

Desde el punto de vista de los agentes económicos, los instrumentos derivados ofrecen nuevas alternativas de inversión, de manera que su empleo a gran escala incrementa la eficiencia del mercado de capitales a través de tres propiedades esenciales (cf. C. Vrolijk (1997)):

a) Cobertura de riesgo: una transacción involucrando derivados transfiere riesgos inherentes al activo subyacente del agente vendedor al agente comprador.

b) Apalancamiento: el alto nivel de apalancamiento permitido por los derivados favorece el incremento en el nivel de transacciones y la baja de costos de capital.

c) Substitución de activos: los derivados facilitan estrategias de arbitraje entre distintos activos.

En otras palabras, si bien la gran ventaja de estos instrumentos es su cualidad de permitir una redistribución del riesgo, dicha redistribución puede también generar efectos adversos en el mercado, ya que en caso de una falla en un eslabón de la cadena de transmisión del riesgo, esto puede redundar en un incremento del riesgo sistémico. Por otro lado, los movimientos de precios se verán amplificados en función de la dinámica de las estrategias de cobertura, éstos pueden originar llamadas al margen y posibles pérdidas. Según estudios efectuados recientemente tales como el Reporte Hanoun del Bank for International Settlements (BIS) de Basilea y el ya mencionado estudio de Vrolijk del Fondo Monetario Internacional (FMI), las propiedades de los derivados mencionadas previamente, al favorecer la eficiencia del mercado, conllevan a una mayor rapidez en los mecanismos de transmisión relativos a los precios de los activos.

En los capítulos subsiguientes se pretende exponer de manera resumida algunos aspectos teóricos de interés, así como trabajos recientes que presentan perspectivas de posible aplicación, además de experiencias de casos prácticos en la utilización de instrumentos derivados en políticas cambiarias.

Un tema de interés para la Banca Central es el cálculo de primas de seguro para depósitos monetarios. En cierta forma, este problema es un ejemplo clásico de cómo asignarle un valor al riesgo (en este caso, el riesgo de quiebra de la institución bancaria donde se efectúa el depósito). Cabe señalar que una opción es un tipo de seguro, de manera que la aplicación de la teoría de valuación de opciones para calcular el costo de seguros de depósito y de garantías de préstamos podría ser una alternativa interesante de investigación a desarrollar. Relativo a este tema se expondrán algunos resultados publicados por Robert Merton sobre el tema de cálculo de primas de seguros de depósito, quien utilizando analogías con la teoría de valuación de activos con riesgo, demuestra cómo aplicar la fórmula de Black y Scholes para valuación de opciones de venta (opciones "put") en este contexto.

Una hipótesis enunciada recientemente en algunos artículos de investigación sostiene que, dado que la utilización de derivados afecta el entorno monetario y cambiario, el comportamiento de los precios de futuros y opciones debería de alguna forma afectar la formación de expectativas, y por ende, la generación de tendencias en el mercado. En otras palabras, el precio de un futuro no hace más que reflejar el comportamiento de las expectativas de los agentes en el mercado respecto al posible desarrollo del precio de un activo a un plazo de tiempo dado. En algunos Bancos Centrales, sobre todo en los de países del G-7, el análisis de precios en los mercados de futuros y contratos adelantados (forwards) es sujeto de atención con fines de estudio y proyección del comportamiento de los precios de los activos financieros subyacentes involucrados, usualmente divisas extranjeras, tasas de interés e índices bursátiles.

Las opciones proveen entonces nuevas fuentes de información respecto a las expectativas del mercado. Por ejemplo, a partir de los precios de las opciones es posible extraer información sobre la llamada volatilidad implicada, la cual es un indicador de la volatilidad esperada en el mercado durante el período de validez de la opción. Por otro lado, las diferencias observadas entre los precios dados de opciones de compra y opciones de venta pueden servir como indicadores de cambios esperados en los precios. En la práctica, para algunos Bancos Centrales, tales como el Banco de Inglaterra, la Reserva Federal de los Estados Unidos de América, el Banco del Japón y el Banco de Francia ya es usual analizar las variaciones de los precios de opciones sobre tasas de interés y tipos de cambio con el fin de analizar el comportamiento de las expectativas del mercado respecto a estas variables.

De hecho, una de las técnicas utilizadas actualmente en la valuación de opciones, tiene como instrumento esencial a las llamadas medidas de probabilidad neutrales al riesgo. Esta metodología calcula valores esperados basados en posibles rendimientos de los instrumentos y utilizando dichas medidas de probabilidad en forma subyacente, de manera que los valores esperados obtenidos se identifican como precios de instrumentos derivados. Es una técnica en la cual es necesario calcular de alguna manera la medida de probabilidad neutral al riesgo correspondiente a la valuación del título derivado. Dicha medida o distribución de probabilidad no es al fin y al cabo más que un artificio teórico-matemático que permite efectuar de forma directa los cálculos de precios. Sin embargo, su cálculo explícito con el objetivo de identificación de expectativas o tendencias del mercado ya ha sido sujeto de trabajos de investigación, de los cuales se describirán algunos resultados mas adelante.

Las intervenciones mediante operaciones de mercado abierto por parte de la Banca Central para estabilizar el comportamiento del mercado es tal vez uno de los campos donde los instrumentos derivados comienzan a jugar un papel más importante. La utilización de opciones de compra o venta de divisas como una alternativa para participar en el mercado cambiario en contraposición a intervenciones directas de compra o venta de divisas ha sido propuesta por algunos especialistas, tanto del sector académico como financiero. La idea subyacente es que de esta manera, la decisión de compra o venta no es tomada por el Banco Central, sino por el mercado. Los regímenes de tipo de cambio fijo o de bandas de cambio pueden requerir intervenciones de algún tipo a fin de mantener los objetivos definidos por la política cambiaria; sin embargo, también en los regímenes de tipo de cambio flotante los Bancos Centrales intervienen de manera coyuntural, usualmente para prevenir ajustes muy bruscos en el tipo de cambio o algún otro tipo de consecuencia más a mediano plazo. Basados en un modelo teórico desarrollado por algunos investigadores (cf. Zapatero y Reverté [1997]), se llevaron a cabo simulaciones numéricas, las cuales parecen indicar que el uso de opciones con fines de intervención por parte de la Banca Central en el mercado de divisas sería más eficiente que la intervención directa, ya que de alguna manera y siempre bajo ciertos supuestos, se reduciría la volatilidad y se suavizarían los shocks.

En este contexto, es importante mencionar el caso de las emisiones de opciones de compra de dólares US iniciada por el Banco de México desde hace dos años; dicha medida parece haber tenido éxito en el sentido de cumplir su finalidad principal como estrategia de acumulación de reservas, sin necesidad de enviar señales que podrían distorsionar al mercado, ni tampoco presionando al tipo de cambio.

Existen otros temas de interés para la Banca Central, mencionemos por ejemplo, del punto de vista de medición de agregados monetarios: existen ciertas propiedades de los derivados a tomar en cuenta, ya que mediante portafolios de derivados pueden crearse substitutos de otros activos (activos "sintéticos"). Sin embargo, estos portafolios que replican activos pueden ser más susceptibles de negociación, es decir, serán más líquidos que los activos subyacentes. Una consecuencia sería que un activo financiero clasificado dentro de un agregado monetario (por ejemplo, un certificado de depósito monetario a un plazo determinado) podría ser substituido por un activo replicante con el mismo efecto a su vencimiento, pero que por su definición y características no sería clasificado como componente del agregado en cuestión. Consecuentemente, la idoneidad de la definición de un agregado para estimar cantidades de dinero se verá disminuida. Por otro lado, tal característica podría facilitar la contravención de regulaciones y controles de las autoridades supervisoras.

Del punto de administración de reservas, el uso de futuros y contratos adelantados (forwards) ofrecen alternativas para administrar los portafolios disminuyendo la exposición al riesgo de variaciones en las tasas de interés mediante estrategias que mantengan el valor o aumenten la duración del portafolio.

Estas notas no persiguen originalidad alguna, su objetivo es revisar y presentar al lector una serie de resultados relacionados con la teoría de los instrumentos derivados los cuales se hallan diseminados en la bibliografía actual, de manera que el lector interesado tenga acceso a información que esperamos pueda ser útil para el desarrollo de posibles aplicaciones tanto de tipo teórico como práctico en el quehacer de la Banca Central. De ninguna manera es una compilación exhaustiva, y se presenta una selección de aquellos temas que a juicio del autor podrían generar corrientes de investigación de interés para técnicos de Banca Central, ya sea a corto o mediano plazo. En lo posible, se ha intentado presentar el material de cada capítulo de forma independiente, ya que se trata de temas relativamente ajenos entre sí. No obstante, para un mejor aprovechamiento de la lectura del documento se recomienda un conocimiento previo de los fundamentos básicos de la teoría de probabilidades, así como aquellos relativos al marco conceptual de los instrumentos derivados. En este sentido es necesaria una introducción elemental sobre los modelos teóricos utilizados para la valuación de opciones, tal es el caso del modelo de Black y Scholes. Es por ello que se recomiendan al lector interesado algunas lecturas previas introductorias en estos temas, por ejemplo, el libro "Futuros y Opciones Financieras" de S. Díaz Tinoco y F. Hernández Trillo o el Cuaderno de Investigación No. 46 del Centro de Estudios Monetarios Latinoamericanos (CEMLA) realizado previamente por el autor.

II. VALUACION DE OPCIONES APLICADA AL CALCULO DE PRIMAS DE SEGUROS DE DEPOSITO

II.1 Antecedentes:

En el mercado de capitales, las instituciones bancarias cumplen un papel como intermediarios entre la oferta y demanda de éstos. La intermediación bancaria facilita las transacciones de este mercado al cumplir varias funciones, tales como subsanar imperfecciones del mercado al ofrecer ciertas ventajas como son las economías de escala y el acceso a información relativa a transacciones financieras. Sin embargo, para un depositante, las ventajas de utilizar los servicios bancarios serán realmente decisivas si éste considera que sus depósitos son transacciones libres de riesgo. En teoría, para tomar su decisión y seleccionar un intermediario en el mercado financiero, un depositante deberá efectuar un análisis sobre las condiciones de riesgo tanto de cada institución bancaria como del mercado en general. Obviamente, dicho análisis implica un costo, el cual muchos depositantes no estarán dispuestos a asumir. En el caso de un fallo en las condiciones, ya sea del mercado o inherente a una institución específica, el depositante deberá soportar el costo de una coyuntura adversa imprevista por los mecanismos regulatorios.

En vista de ello, una alternativa para disminuir el riesgo del depositante es establecer alguna forma de garantía sobre los depósitos. Para ello es necesaria la presencia de un tercer agente que juegue otro papel en el sistema, un garante con una credibilidad fuera de cuestionamiento, el cual actuará de forma inmediata en caso necesario. Dicha garantía se da usualmente de dos formas: ya sea que el Banco Central actúe como prestamista de última instancia para la institución que afronta dificultades, lo cual puede llegar a ser sumamente costoso, o bien constituir un seguro de depósitos, administrado ya sea por el Banco Central, por la entidad supervisora del sistema bancario o por otra institución específica.

Un problema fundamental asociado a esta segunda alternativa es el costo del seguro. Este costo debería reflejar el riesgo de quiebra o insolvencia del banco en cuestión, ya que la existencia de este seguro podría inducir bajo ciertas condiciones adversas, a que una institución asumiera estrategias propensas a un mayor riesgo, ya que en caso de resultados desfavorables sería la entidad garante la que asumiría el costo (moral hazard). En caso contrario, los beneficios serían para la institución que asumió el riesgo.

Es en este contexto que se justifica dar a conocer los trabajos de investigación publicados por R. Merton en los años setentas. Merton analiza inicialmente el problema de la valuación de deuda de corporaciones en situaciones de riesgo, particularmente la valuación de bonos. Posteriormente aplicó metodologías similares en el caso específico de instituciones bancarias. En un artículo publicado en 1977 en el Journal of Banking and Finance, el autor indica la posibilidad de utilizar técnicas de valuación de opciones en vista de que las propiedades de un seguro de depósito son equivalentes a las de una opción de venta tipo europeo (opción "put"). La existencia de la fórmula de Black y Scholes es determinante en la utilidad de esta analogía ya que ésta permite una valuación directa sobre opciones, ya sea de compra o de venta. La metodología de análisis empleada para el desarrollo de dicha fórmula puede ser utilizada en forma más generalizada para la valuación de otros títulos financieros emitidos por una empresa. La fórmula no requiere un conocimiento de la tendencia de los precios de mercado para el activo evaluado, de manera que su aplicación para la valuación de activos no negociables debería ser de gran ventaja, como es en el caso de primas de seguros de depósito.

II.2 El modelo de Merton:

Una opción de venta tipo europeo concede a su comprador el derecho a vender un determinado número de unidades de algún tipo de activo subyacente a un precio prefijado al momento de acordarse la transacción (precio de ejercicio). Tal derecho podrá o no ser ejercido a una fecha predeterminada (fecha de vencimiento). En el caso de que la opción no sea ejercida a su vencimiento, ésta expira sin valor alguno; es claro que este será el caso si el precio del activo ***S*** es mayor que el precio de ejercicio ***E,*** ya que el tenedor de la opción podrá vender su activo a un mejor precio en el mercado. En caso contrario, el tenedor ejercerá la opción, y el valor de ésta será precisamente la utilidad ***V*** generada por ejercer la opción, o sea, la diferencia entre el precio de ejercicio ***E*** y el precio del activo ***S***, esto es:

$$V = E - S \,.$$

En el caso general se define la función $P(\tau)$, la cual representa el precio de la opción en función de la variable τ: que representa el plazo para expiración de la opción. A su vencimiento, el valor de la opción "put" será dado por la expresión:

$$P(0) = \max(E-S,\ 0) = (E-S)^{+} \,.$$

Para el caso de un valor arbitrario de la variable τ:, basados en ciertas hipótesis sobre la estructura del mercado, tales como la ausencia de arbitrajes y la modelación como un proceso aleatorio específico del comportamiento del precio del activo ***S*** , Fischer Black y Myron Scholes publican en su célebre artículo de 1973 la siguiente fórmula para calcular el precio de la opción "put":

$$P(\tau) = Ee^{-r\tau} N(d_2) - SN(d_1)$$

donde

$$d_1 = \left[\log(E/S) - \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right] \Big/ \sigma\sqrt{\tau}$$

$$d_2 = d_1 + \sigma\sqrt{\tau}$$

El término $N(d)$ describe la función de distribución acumulada normal gaussiana, r es la tasa de interés libre de riesgo disponible en el mercado y σ^2 es la varianza por unidad de tiempo del logaritmo de la tasa de retorno del activo subyacente. Un aspecto importante es que la fórmula no depende del retorno esperado del activo subyacente ni de la aversión al riesgo del inversionista.

Para justificar el modelo en el caso discutido previamente, se supone el escenario de una empresa que al prestar un determinado monto, emite un título de deuda (bonos de deuda). La empresa se compromete a pagar un monto ***B*** al vencimiento del compromiso; no se supone ningún pago intermedio o pago de cupones. En el caso de no poder redimir la deuda, la empresa liquida al tenedor del título con los activos de la empresa.

Al vencimiento del título de deuda, si el valor de los activos de la empresa es mayor que el monto adeudado ($V>B$), los accionistas de la empresa tienen interés en que se liquide la deuda. En este caso, el valor de la emisión de deuda será B y el valor del activo en poder de los accionistas será $V-B$. Por el contrario, si a su vencimiento el valor $\boldsymbol{V}$ de los activos es menor que el monto de la deuda ($V<B$); se dará el caso de que, aunque se vendan los activos de la empresa, no se podrá saldar la deuda, de manera que la empresa es liquidada a favor de los tenedores de títulos de deuda y el valor de emisión de ésta será de un monto $\boldsymbol{V}$**,** mientras que el valor de los títulos de acción será nulo.

Resumiendo, el valor de deuda será $Vd=min(V,B)$, y el valor del activo en posesión de los accionistas será $Va=max(V-B,0)$.

Suponiendo la existencia de un tercer agente en el mercado, el garante del pago de deuda a los tenedores de bonos, entonces las condiciones del garante son las siguientes, según el escenario dado.

1. Si $V< B$, el garante paga el monto B a los tenedores y en este caso la empresa cede sus activos al garante. Expresado de otra manera, el tenedor de deuda recibe B, el emisor del título de deuda recibe 0 y el garante tiene una pérdida igual a $B-V$ (o sea, la diferencia entre el monto de la deuda y el valor de los activos).
2. Si $V>B$, el acreedor (tenedor del bono) recibe B y el emisor de deuda tiene en su haber: $Vd=V-B$. El garante no entrará en juego, es decir, su pago es nulo.

De hecho, el garante está asegurando la emisión de deuda basado en la probabilidad de que a su vencimiento ocurra el evento: $V>B$, lo cual obviamente tendrá un costo para el asegurado. Para determinar este costo, se analizan a su vencimiento los valores o pagos de los diversos títulos de la forma siguiente:

a) El valor del activo del accionista es el mismo con o sin garante, éste será $Va = max(V-B,0)$
b) El valor de la deuda será siempre B, de manera que se puede considerar como libre de riesgo.
c) El valor de la obligación del garante será $Vg = min(0, V-B)$, el cual tendrá siempre un valor no-positivo.

En resumen, el seguro contratado genera para la empresa un pago adicional, el cual será $-min(0,V-B)= max(0, B-V)$, ya que el garante tiene un pago por efectuar de $max(0, B-V)$. Si para un plazo de vencimiento τ de la obligación de deuda se denomina como $G(\tau)$ el valor para la empresa de la garantía de pago, a su vencimiento $(\tau=0)$ éste será: $G(0)=max(0, B-V)$. Es decir, la garantía tiene esencialmente el mismo comportamiento que una opción de venta tipo europeo, donde el pago de deuda B corresponde al precio de ejercicio E y el valor de los activos de la empresa V corresponden al precio del activo S. Al garantizar el pago de deuda, el garante ha emitido una opción "put" sobre los activos de la firma, que conceden el derecho a vender los activos de la empresa por el monto *B* al vencimiento de la deuda.

Con base en la fórmula de Black y Scholes, en este caso se obtiene la siguiente expresión para el valor de la garantía:

$$G(\tau) = Be^{-r\tau} N(d_2) - VN(d_1),$$

tomando en cuenta el cambio de variables mencionado anteriormente para la redefinición de los parámetros d_1 y d_2.

Al tener entonces una emisión de deuda por un monto *B* con vencimiento al término de un período de longitud *T*, el costo para el garante de respaldar el pago de deuda será *G(T)*.

Sea $Be^{-R_T T}$ el valor de mercado de la deuda sin garantía, donde R_T es la tasa de rendimiento negociada en el documento; entonces Be^{-rT} representa el valor de mercado de la deuda con garantía, siendo *r* la tasa de rendimiento para instrumentos libres de riesgo en el mercado. Se obtiene entonces la siguiente identidad:

$$G(T) + Be^{-R_T T} = Be^{-rT}$$

A partir de la fórmula anterior se puede calcular el costo de la garantía de préstamo como una fracción del monto dado en préstamo:

$$\frac{G(T)}{Be^{-rT}} = 1 - e^{-(R_T - r)T}.$$

Finalmente, si se supone que la empresa es una institución bancaria, la emisión de deuda es equivalente al monto de depósitos, aunque la interpretación en términos de una emisión de deuda a un plazo determinado no sería adecuada, el plazo de vencimiento podría reinterpretarse como la fecha futura de la próxima auditoría de los activos bancarios. Si en este caso se interpreta a *B* como el monto tanto del principal como de los intereses garantizados, el monto de depósitos asegurados será: $D = Be^{-rT}$.

Adicionalmente, es necesario definir el costo unitario de garantía *g* de la siguiente forma:

$$g = \frac{G(T)}{D}$$

Consecuentemente, a partir de la fórmula de Black y Scholes se puede escribir *g* como:

$$g(d,\tau) = N(h_2) - \frac{1}{d} N(h_1)$$

donde las variables h_1 y h_2 se definen de la manera siguiente:

$$h_1 = \left\{ \log(d) - \frac{\tau}{2} \right\} \Big/ \sqrt{\tau}$$

$$h_2 = h_1 + \sqrt{\tau}$$

siendo $d = \frac{D}{V}$ el cociente o razón de los depósitos sobre el valor de los activos y $\tau = \sigma^2 T$ la varianza de cambio logarítmico del valor de los activos durante el período de vigencia de los depósitos.

De la fórmula anterior se observa que, al existir cambios en la tasa de interés de mercado, éstos no tendrán un efecto explícito en el costo de seguro de depósito, a menos que tales variaciones afecten la razón de depósitos /valor de activos (*D/V*). Por otro lado, la razón de variación en el costo *g* respecto a las variaciones en la razón *D/V* estará dada por:

$$\frac{\partial g}{\partial d} = \frac{N(h_1)}{d^2},$$

En este caso el cociente es positivo, por lo que el costo unitario marginal también lo será, esto indica que el costo unitario se incrementa al incrementarse la razón *d=D/V* . Un efecto análogo se observa para incrementos en el plazo τ, ya que se calcula:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \frac{N'(h_1)}{2d\sqrt{\tau}}$$

De nuevo, el cociente calculado indica que al darse un incremento, ya sea en la variabilidad del valor de los activos o en el plazo de vencimiento, se incrementará el costo unitario.

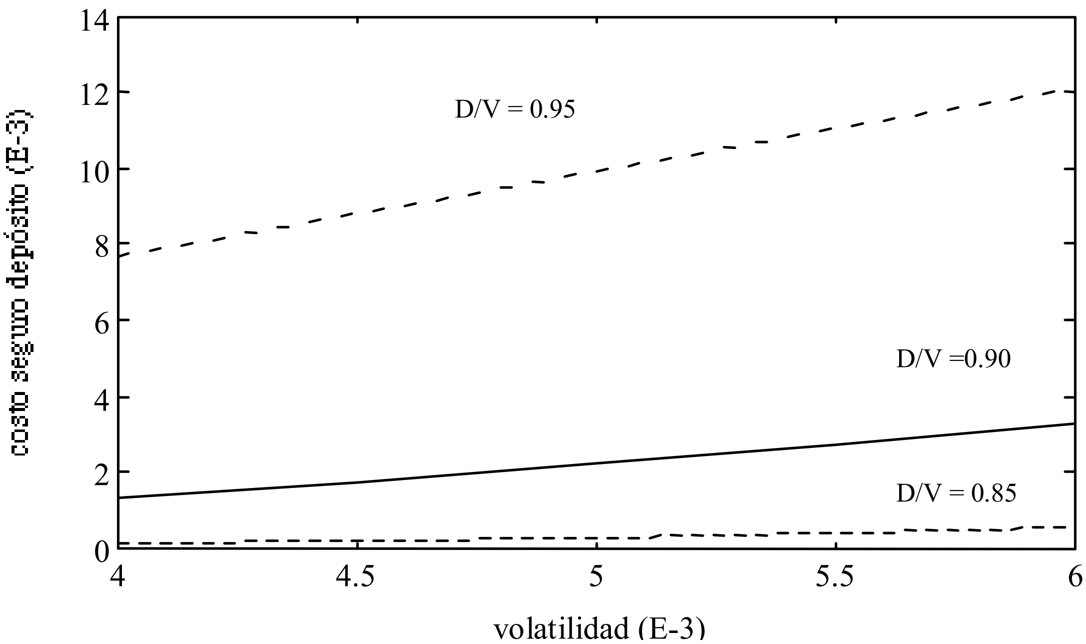
Por otro lado, a partir de la fórmula de Black y Scholes correspondiente, se infiere que la tasa de interés del mercado no afecta, al menos de forma explícita, el costo del seguro. Ello no excluye posible efectos indirectos por intermedio de otras variables tales como la razón depósitos / valor de activos (*D/V*) antes citada.

A continuación se presentan algunos resultados calculados a partir de la fórmula de Black-Scholes. Dichos resultados son presentados por Merton (1977) habiendo sido adaptada la fórmula al cálculo de la variable *g*, el costo unitario de seguro de depósito. Asumiendo distintos valores para la razón *d=D/V* , se presentan las valores del costo *g* (en dólares) respecto a distintos valores de la volatilidad tomada a un año plazo. Para tener un punto de referencia, la volatilidad a un año plazo de los bonos a largo plazo del gobierno norteamericano ha tenido un valor τ=0.003 en la década de los setentas.

D/V=0.85	
	Costo unitario
Volatilidad τ	**seguro de depósito**
0.0060	**0.00055**
0.0055	**0.00040**
0.0050	**0.00028**

0.0045	0.00018
0.0040	0.00011
D/V=0.90	
	Costo unitario
Volatilidad τ	seguro de depósito
0.0060	0.00326
0.0055	0.00274
0.0050	0.00223
0.0045	0.00176
0.0040	0.00132
D/V=0.95	
	Costo unitario
Volatilidad τ	seguro de depósito
0.0060	0.01209
0.0055	0.01102
0.0050	0.00992
0.0045	0.00880
0.0040	0.00765

En base de los datos presentados, es ilustrativo observar el comportamiento de éstos según la gráfica adjunta.



III. INTRODUCCION AL CALCULO Y APLICACIONES DE MEDIDAS NEUTRALES AL RIESGO:

III.1. Definición y ejemplos:

Una de las metodologías utilizadas actualmente para valuar opciones y otros instrumentos financieros derivados es la aplicación de medidas de probabilidad neutrales al riesgo. Esta se ha difundido ampliamente, ya que simplifica el cálculo de los precios de derivados y además permite inferir si el modelo utilizado para describir el mercado es o no consistente. Una medida de probabilidad neutral al riesgo es una distribución de probabilidades "artificiales", en el sentido de que no es generada por algún agente a partir de observaciones en el mercado. Sin embargo, dicha medida es utilizada para calcular el precio mencionado mediante el cálculo del valor esperado descontado de cierta variable aleatoria, la cual depende del precio del activo subyacente.

La idea básica es la siguiente: suponiendo que existe un mercado financiero con n activos, cuyos precios son conocidos, se tiene un título adicional, el cual genera al final de un período predefinido de longitud T, un flujo de efectivo X, el cual es aleatorio. Si dicho título es un instrumento derivado, los valores posibles de X dependerán de los precios de otros activos, los llamados activos subyacentes. Si disponemos de una medida neutral al riesgo Q, entonces, el valor V al inicio del período del activo en cuestión será dado por:

$$V = (1+r)^{-T} E_Q(X)$$

en el caso de capitalización simple discreta, ó

$$V = e^{-rT}E_Q(X)$$

en el caso de capitalización compuesta continua.(Ambas fórmulas serán utilizadas indistintamente en los párrafos subsiguientes, dependiendo del contexto específico del ejemplo o aplicación tratada)

Se trata en ambos casos del valor esperado del flujo generado por el activo al final del período, calculado mediante la medida de probabilidad Q y descontado a valor presente. Un argumento que justifica intuitivamente la fórmula presentada es el siguiente: si V denota el valor del activo, al depositar un monto V, a una tasa r, la tasa de interés libre de riesgo, se obtendrá al final del período el monto Ve^{rT}(en el caso de capitalización continua). Por otra parte, un agente económico neutral al riesgo, cuyas expectativas del comportamiento los precios se rige por la medida de probabilidad Q, tiene la expectativa de un retorno $E_Q(X)$ al efectuar la inversión. Consecuentemente, si se asume ausencia de arbitrajes en el mercado, ambos retornos deberán ser iguales, es decir:

$$Ve^{rT} = E_Q(X)$$

a partir de esta expresión podemos despejar algebraicamente la fórmula para V.

El concepto de medida neutral al riesgo será analizado mediante el siguiente planteamiento: supongamos un modelo discreto de un período con dos activos financieros, uno de los cuales es un activo sin riesgo (usualmente se le denomina bono). Si pensamos en que se invierte un dólar en bonos, esto generará en un período (en el caso de capitalización simple) el monto $1+r$, donde r es la tasa de interés libre de riesgo. Si denotamos al valor del bono por B, éste tendrá al inicio del proceso el valor: $B = B_0 = 1$ y a su vencimiento: $B = B_1 = 1 + r$.

Además, se propone como un tercer instrumento en el mercado un activo contingente, es decir, un activo cuyo valor X depende del precio del activo subyacente S (aunque no es excluyente de otros casos, usualmente identificamos a este activo con una acción). La acción tiene un precio inicial S_0, de manera que después de un período, su precio S puede tomar, según el escenario que ocurra, uno de los dos valores siguientes:

$$S = \begin{cases} uS_0 \\ dS_0 \end{cases}$$

donde el valor uS_0 ocurre con una probabilidad positiva p y el valor dS_0 con probabilidad $1-p$. A fin de excluir estrategias de arbitraje, se asume: $d < 1 + r < u$. El esquema se completa con los valores de los flujos correspondientes al activo contingente, los cuales serán:

$$X = \begin{cases} X_u \ \ si \ \ S = uS_0 \\ X_d \ \ si \ \ S = dS_0 \end{cases}$$

Para poder valuar en la etapa inicial al activo contingente es necesario calcular, utilizando combinaciones de los otros activos del mercado, un portafolio replicante, es decir:

1. Que el valor del portafolio al finalizar el período sea igual al valor del activo contingente en cualquier escenario probable.
2. Que una vez el portafolio haya sido estructurado, no se efectúan inversiones o retiros adicionales hasta su vencimiento.

Para el cálculo del portafolio replicante se deberán calcular las magnitudes Δ y ϕ tales que: $X = \Delta S + \phi B$ de manera que, a su vencimiento, se obtiene para cada evento probable:

$$X_u = \Delta u S_0 + \phi B_1$$
$$X_d = \Delta d S_0 + \phi B_1$$

Esto implica resolver un sistema de ecuaciones para Δ y ϕ, de manera que se obtiene:

$$\Delta = \frac{X_u - X_d}{uS_0 - dS_0} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{uX_d - dX_u}{B_1(u-d)}$$

Es importante hacer notar que, sustituyendo explícitamente las expresiones calculadas en la fórmula original en el evento inicial (i.e. $X = X_0$, $B_0 = 1$), una vez se reordenan términos se obtiene:

$$X_0 = \frac{1}{B_1}\left[\left(\frac{B_1 - d}{u - d}\right)X_u + \left(\frac{u - B_1}{u - d}\right)X_d\right]$$

Nótese que los dos coeficientes entre corchetes de los valores de X son positivos y suman la unidad, de manera que cumplen las condiciones para describir una distribución de probabilidad. Es decir, si definimos a los coeficientes mencionados como las componentes de un vector de probabilidades Q , tenemos en este caso un ejemplo elemental de una medida de probabilidad neutral al riesgo.

Utilizando la definición formal de valor esperado bajo la medida de probabilidad Q (Ver apéndice) se obtiene:

$$X_0 = \frac{E_Q(X_1)}{B_1}$$

Esta medida de probabilidad puede ser utilizada para valuar todos los activos contingentes basados en activos subyacentes del modelo, ahora bien, dicha medida existe solamente si el modelo de mercado utilizado excluye la posibilidad de estrategias de arbitraje. Además, puede darse el caso de que exista un activo cuyo valor no pueda ser replicado mediante algún portafolio, la moderna teoría financiera denomina a este tipo de mercado como mercado no completo. Si así fuese el caso, existirán múltiples medidas neutrales al riesgo.

Para facilitar el objetivo introductorio de estas notas, se asumirán mercados completos, (es decir, todo activo modelado puede ser replicado). Del punto de vista de la teoría económica financiera moderna, supone mercados completos tiene como consecuencia garantizar la existencia de una medida neutral al riesgo. En algunos casos, como en el ejemplo previo, el cálculo explícito será relativamente sencillo, sin embargo, en otros modelos con un mayor número de variables no será ese el caso. Es por ello que se explorarán algunas alternativas de cálculo que se encuentran en la bibliografía especializada.

III.2. Una interpretación económica

Desde una perspectiva de la teoría económica, los valores de las probabilidades neutrales al riesgo pueden interpretarse como los precios de una clase especial de activos financieros, los llamados activos de Arrow -Debreu o activos puros. Un activo de Arrow-Debreu es un activo asociado a un evento o estado particular del mercado, de manera que si se da el evento, el activo mencionado paga un rendimiento de valor unitario, en caso contrario su rendimiento es nulo. Si se denota como e_s al activo de Arrow- Debreu correspondiente al escenario o evento ω_s, se tiene entonces

$$e_s(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega = \omega_s \\ 0 & \omega \neq \omega_s \end{cases}$$

Si bien los activos de Arrow-Debreu no se dan en la realidad, constituyen una construcción teórica de utilidad para diversos análisis y cálculos en teoría financiera. Por otra parte, los activos referidos pueden ser representados en forma aproximada por instrumentos dados en el mercado, como se explicará más adelante.

Para un universo de N posibles eventos o escenarios en el mercado, se define una colección de N activos de Arrow-Debreu e_s, donde $s=1......N$. Estos se definen de manera que su rendimiento será e_s=1 en caso se realice el s-ésimo evento o escenario, en todos los otros casos el valor de e_s es nulo. Utilizando este artificio, un activo X que tenga los posibles resultados $\left(X^1,....,X^s,....,X^N\right)$ puede entonces ser descrito mediante la sumatoria $X = X^1 e_1 + ... + X^s e_s + ... + X^N e_N$.

El valor o precio V del activo X será

$$V = X^1\psi_1 + ... + X^s\psi_s + ... + X^N\psi_N \quad ,$$

donde cada magnitud ψ_s >0, llamada precio estado, se interpreta como el precio del activo de Arrow-Debreu correspondiente e_s.

Si definimos la magnitud $\psi_0 = \psi_1 + ... + \psi_s + ... + \psi_N$, entonces adicionalmente se dan las nuevas variables $q_s = \dfrac{\psi_s}{\psi_0}$, de manera que V se puede reescribir en términos de las componentes q_s como

$$V = \psi_0 (q_1 X^1 + ... + q_s X^s + ... + q_N X^N)$$

En este caso, nótese que los valores q_s pueden ser interpretados como las componentes de una distribución discreta de probabilidad *Q,* ya que son todas magnitudes positivas y además $\sum_{s=1}^{N} q_s = 1$.

De nuevo, l aplicar la definición formal de esperanza matemática, se obtiene: $V = \psi_0 E_Q(X)$, donde $E_Q(X)$ denota el valor esperado de *X* respecto a la medida de probabilidad *Q*.

Ahora bien, debido a su definición como suma de precios de activos puros, el valor ψ_0 puede a su vez ser interpretado como el valor de un activo cuyo rendimiento es siempre igual a un dólar, sin importar el evento que suceda. De hecho, se trata del activo con vector de rendimiento $e_1 + \ldots + e_s + \ldots + e_N = (1, \ldots, 1, \ldots, 1)$. En este caso tenemos un instrumento financiero con un rendimiento equivalente al de un bono libre de riesgo, el cual paga un dólar no importando cual sea el escenario. Por definición, el precio ψ_0 de un activo de este tipo es un dólar descontado a la tasa libre de riesgo *r*, o lo que en este caso es lo mismo, el inverso de su rendimiento, es decir, $\psi_0 = \frac{1}{1+r}$.

Esto nos da como resultado, al aplicarse en el cálculo del valor *V*:

$$V = \frac{E_Q(X)}{1+r},$$

de manera que mediante los precios ψ_S de los activos puros e_S se define una medida neutral al riesgo *Q*.

III.3. El enfoque de programación lineal

Otra interpretación de la medida *Q* puede ser obtenida en el marco teórico de la programación lineal, como la solución del problema dual a un problema de portafolio, formulación utilizada por algunos autores para el cálculo explícito de *Q*. Este modelo se presenta en apéndice adjunto. Dados ciertos activos en el mercado, se busca maximizar el valor de un portafolio de inversión de dichos activos sujeto a la restricción que, bajo determinados escenarios, dicho portafolio esté sujeto a rendimientos dados. Si tales rendimientos se interpretan como rendimientos correspondientes a los de un activo contingente, el problema dual planteado se interpretará como la minimización del precio esperado de dicho activo.

Tomando en cuenta la interpretación económica clásica de las variables duales ψ correspondientes a la solución del problema dual, las magnitudes

$$\psi_s = \psi_0 q_s = (1+r)^{-1} q_s$$

pueden entonces ser interpretadas como precios marginales descontados, o sea, variaciones marginales del valor del portafolio respecto a variaciones en los rendimientos del activo subyacente en el escenario *s*. Haciendo referencia a la representación matemática de la variación marginal mencionada como derivada parcial de V respecto a X^s, a partir de la representación del valor de portafolio en términos de precios estado, se obtiene:

$$\frac{\partial V}{\partial X^s} = \psi_s = \psi_0 q_s.$$

A partir de la formula anterior se interpreta que, para todo escenario o evento posible s, el precio estado correspondiente ψ_s será igual al valor de una probabilidad q_s de dicho evento multiplicada por el factor de descuento ψ_0. Nótese que en el caso discreto dicho factor es $\psi_0 = (1+r)^{-1}$, este resultado puede ser generalizado al caso continuo, donde en lugar de un vector q se tendrá una función de densidad y el factor de descuento será de tipo exponencial. Hacemos énfasis en la importancia de este resultado, el cual nos será de utilidad posteriormente.

III.4. El modelo continuo

Los modelos de tiempo continuo demandan el uso de modelos basados en movimientos brownnianos. La metodología de valuación neutral al riesgo puede también ser utilizada en este contexto, pero la complejidad de los modelos estocásticos en tiempo continuo hace la tarea más ardua. Sin embargo, es posible demostrar en el caso de opciones tipo europeo, que al calcular los valores esperados de los rendimientos utilizando funciones densidad de probabilidad neutrales al riesgo, se obtiene la fórmula de Black y Scholes de valuación de opciones mediante el cálculo siguiente:. recordando que para un precio de ejercicio K el valor a vencimiento de una opción de compra (opción "call") de una acción es

$$f(S) = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

En este caso, S_T es el valor del activo subyacente a la fecha de vencimiento T y K el precio de ejercicio convenido para dicho activo.

Asumiendo la existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo Q, se obtiene como el valor de opción al principio del proceso la expresión de valor esperado descontado bajo la medida Q:

$$C(K,T) = e^{-rT} E_Q\left[(S_T - K)^+\right]$$

O sea, en términos de la función densidad de probabilidades correspondiente q:

$$C(K,T) = e^{-rT} \int_K^{\infty} (S_T - K) q(S_T) dS_T$$

En este caso se descuenta el valor esperado asumiendo capitalización continua y utilizando la función densidad de probabilidad usual del modelo Black-Scholes:

$$q(S_T) = \exp\left(-\left[\ln\left(S_T / S_0\right) - rT + \sigma^2 T/2\right]^2 / \left(2\sigma^2 T\right)\right)$$

En este contexto, la función q se interpreta precisamente como la función de densidad de probabilidad neutral al riesgo, lo cual, llevando a cabo los cálculos correspondientes en términos de valor esperado respecto a la función q, coincide con los resultados conocidos a partir de la fórmula Black-Scholes. Este resultado implica que en el caso de una opción de venta (opción "put") se tendrá de forma análoga para el cálculo de su precio como valor esperado en base de la medida de probabilidad q:

$$P(K,T) = e^{-rT}\int_0^K \left(K - S_T\right) q\left(S_T\right) dS_T \, .$$

III.5 Cálculo de medidas neutrales al riesgo:

III.5.1. El modelo de Breeden-Litzenberger:

La cuestión que nos ocupará en lo que sigue es el cálculo explícito de la medida neutral al riesgo dentro de un modelo de mercado financiero, lo cual en el caso de modelos de tiempo continuo nos lleva a calcular las funciones de densidad correspondientes. La motivación en nuestro caso es utilizar la información contenida implícitamente en tales medidas para identificar posibles tendencias en el mercado.

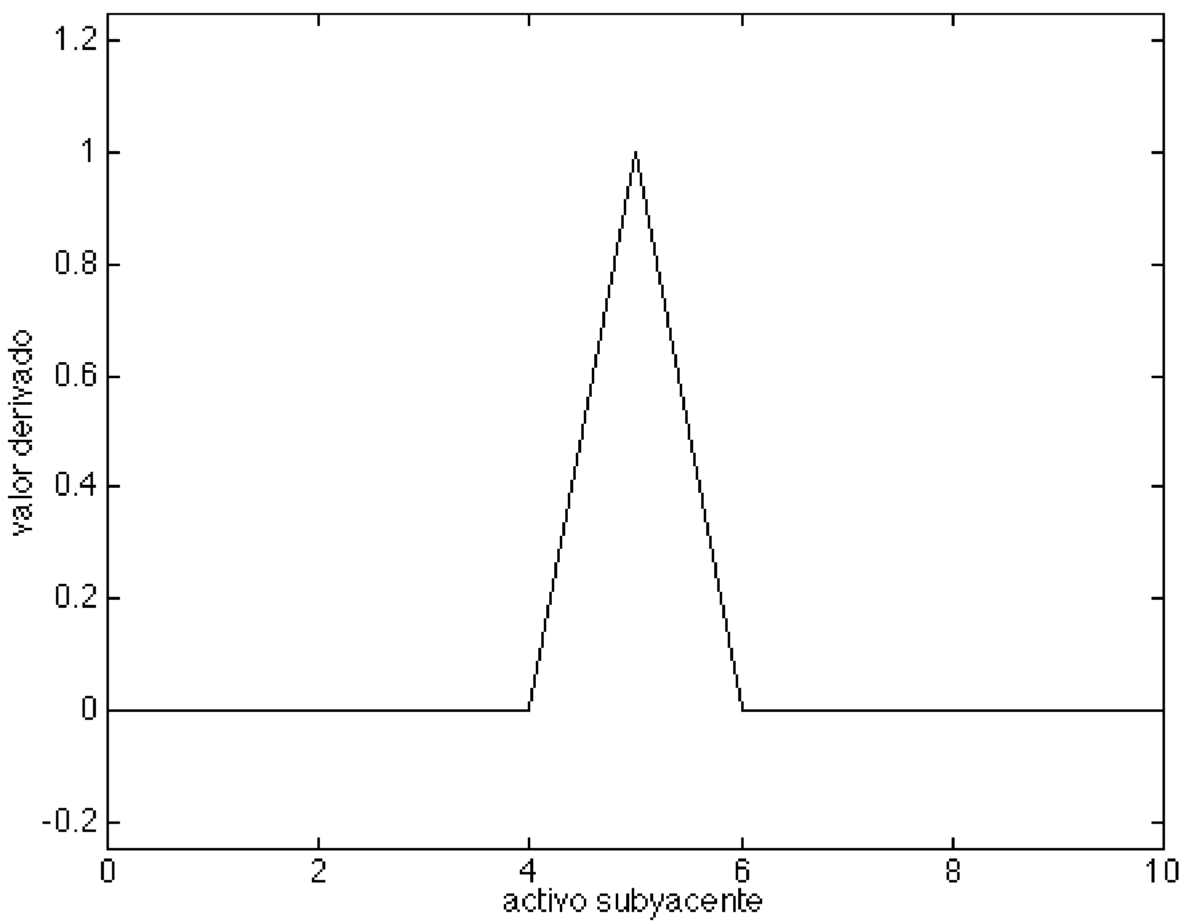
Una contribución muy importante a la solución de este problema es aportada por Breeden y Litzenberger (1978): para ello se utilizan los activos puros o activos de Arrow-Debreu, los cuales fueron introducidos previamente en el contexto teórico. Se hizo mención en el inciso 2 de que los precios de dichos activos, los llamados precios-estado, son proporcionales a los valores correspondientes de las probabilidades neutrales al riesgo de cada uno de los posibles estados del mercado. Desafortunadamente, no existen activos puros disponibles en el mercado, de manera que estos precios no son observables de manera explícita. Sin embargo, es posible diseñar mediante un portafolio de opciones europeas de compra un instrumento derivado con características que replican de forma aproximada el rendimiento de un activo puro, dicho portafolio se obtiene vendiendo dos opciones de compra con precio de ejercicio $K = S_T$ y comprando dos opciones de características similares, pero con precios de ejercicio $K = S_T + \Delta S_T$ y $K = S_T - \Delta S_T$, donde ΔS_T define la longitud de intervalo entre los rendimientos de dos estados adyacentes.

Este portafolio tendrá la estructura siguiente:

$$\Pi\left(S_T,\tau\right) = c\left(S_T + \Delta S_T,\tau\right) - 2c\left(S_T,\tau\right) + c\left(S_T - \Delta S_T,\tau\right)$$

en este caso se tiene la variable $\tau = T - t$ donde τ es el plazo a vencimiento. El instrumento financiero descrito por el portafolio tiene la particularidad de tener a su vencimiento una utilidad de ΔS_T dólares cuando se da el precio del subyacente $S = S_T$, siendo su rendimiento nulo fuera del intervalo centrado $S_T - \Delta S_T \leq S \leq S_T + \Delta S_T$. Se trata de un instrumento conocido como spread mariposa (butterfly spread), centrado en el precio S_T.

Para una mejor ilustración de la estructura del spread mariposa, consideremos el caso donde $S_T = 5$ y $\Delta S_T = 1$. Al calcular explícitamente el valor al vencimiento del derivado se obtiene la gráfica siguiente.



Utilizando la representación del portafolio Π, Breeden y Litzenberger demuestran que en este caso:

$$\lim_{\Delta S_T \to 0} \frac{P(S_T, \Delta S_T)}{\Delta S_T} = \lim_{\Delta S_T \to 0} \frac{\Pi(S_T, \Delta S_T)}{(\Delta S_T)^2} = \left. \frac{\partial^2 C(X,\tau)}{\partial X^2} \right|_{X = S_T}$$

Tomando en cuenta el resultado final del segundo inciso, según el cual la variación marginal del valor de un portafolio respecto a la variación del rendimiento del activo subyacente es igual al precio estado correspondiente, se enuncia un resultado análogo en el contexto de los modelos continuos, donde el precio estado es igual al valor descontado de la probabilidad neutral al riesgo del estado en cuestión (en este caso: $X = S_T$), es decir:

$$\frac{\partial P(S_T,\tau)}{\partial S_T} = \psi_{S_T} = e^{-r\tau} q(S_T)$$

Finalmente, lo anterior implica que la segunda derivada de la función de precios de la opción de compra respecto al precio de ejercicio es igual a la función densidad neutral al riesgo correspondiente, valuada para en un precio de ejercicio igual a S_T y multiplicada por un factor de descuento, o sea:

$$\left.\frac{\partial^2 C(X,\tau)}{\partial X^2}\right|_{X=S_T} = e^{-r\tau} q(S_T).$$

Para poder utilizar este resultado en la práctica se requeriría que los rendimientos de la opción para un plazo de vencimiento y un activo subyacente dados fuesen conocidos a lo largo de un intervalo continuo, lo cual no es el caso, ya que los precios de ejercicio se negocian dentro de un rango limitado y cambian de manera discreta, no continua. Esto conlleva a la necesidad de utilizar técnicas matemáticas de interpolación y aproximación para la estimación de las densidades neutrales al riesgo.

Basados en el resultado ya mencionado de Breeden y Litzenberger, se pueden calcular estimaciones sencillas, utilizando una aproximación de la valuación del spread mariposa en torno de un valor S_T para aproximar el valor de la segunda derivada. En este caso, la derivada de segundo orden se expresa de forma aproximada, mediante un cociente de diferencias, lo cual nos da como alternativa de aproximación de la densidad *q* la fórmula siguiente:

$$q(S_T) = e^{r\tau} \frac{\lfloor C(S_T+\Delta S_T,\tau) - C(S_T,\tau) \rfloor - \lfloor C(S_T,\tau) - C(S_T-\Delta S_T,\tau) \rfloor}{(\Delta S_T)^2}$$

La fórmula precedente expresa en términos de diferencias de precios de "calls" un valor aproximado de función densidad neutral al riesgo valuada en S_T. Mediante esta aproximación, la función densidad *q* puede ser calculada para precios de opciones de compra observados a lo largo de un rango de precios de ejercicio, de manera que se genera un histograma correspondiente, el cual representa la densidad neutral al riesgo inherente al mercado y correspondiente a la secuencia de opciones considerada. Esta aproximación puede ser calculada de manera rápida, pero usualmente adolece de un cálculo adecuado de la función densidad en los intervalos correspondientes a eventos extremos, o sea, en lo referente a eventos de baja probabilidad (las llamadas "colas" de la función densidad distribución).

III.5.2 Un modelo de aproximación de funciones densidad:

Otra alternativa para calcular medidas neutrales al riesgo considerada en la bibliografía es la siguiente: si se toma en cuenta la fórmula integral correspondiente a la interpretación del precio del "call" como un valor esperado:

$$C(K,T)=e^{-rT}\int_K^{\infty}(S_T-K)q(S_T)dS_T$$

donde *q* representa una función densidad de probabilidades, entonces la fórmula integral nos permite utilizar los resultados de Black y Scholes para calcular en forma explícita la función densidad buscada. Recordemos que en dicho modelo se asume que el precio S_T se comporta como una variable aleatoria tipo log-normal, es decir, el logaritmo del precio, $\ln S_T$, se le atribuye como distribución de probabilidades una distribución normal gaussiana con media α y desviación estándar β .

Como se mencionó previamente, la función densidad neutral al riesgo será entonces dada por :

$$q(S_T)=\frac{1}{S_T\beta\sqrt{2\pi}}\exp\left(-(\ln S_T-\alpha)^2/2\beta^2\right)$$

donde:

$$\alpha=\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\tau$$

$$\beta=\sigma\sqrt{\tau}$$

La idea desarrollada por B. Bahra (1997) es generalizar este enfoque, asumiendo que la función densidad *q* específica es una combinación lineal de funciones densidad tipo log-normal, las cuales tienen la estructura presentada según el modelo Black-Scholes. Es decir, que la función densidad *q* tiene la estructura siguiente:

$$q(S_T)=\lambda_1\Theta(\alpha_1,\beta_1;S_T)+\ldots+\lambda_i\Theta(\alpha_i,\beta_i;S_T)+\ldots+\lambda_K\Theta(\alpha_K,\beta_K;S_T)$$

donde cada función $\Theta(\alpha_i,\beta_i;S_T)$ representa una función densidad tipo log-normal del tipo Black-Scholes, con parámetros α_i,β_i y las constantes λ_i representan ponderaciones positivas tales que: $\sum_{i=1}^{K}\lambda_i=1.$

Por ejemplo, en el caso de dos componentes Θ, se tendrá: $q(S_T)=\lambda\Theta(\alpha_1,\beta_1;S_T)+(1-\lambda)\Theta(\alpha_2,\beta_2;S_T)$, ya que debido a la restricción impuesta a las ponderaciones λ sólo será necesario el cálculo de una ponderación. Consecuentemente, asumiendo dicha estructura para la densidad *q*, en el caso de la representación del precio como valor esperado utilizando tal densidad, se obtiene a partir de la fórmula integral la siguiente expresión para describir el precio de la opción de compra:

$$C(X,\tau)=e^{-r\tau}\int_X^{\infty}\left[\lambda\Theta(\alpha_1,\beta_1;S_T)+(1-\lambda)\Theta(\alpha_2,\beta_2;S_T)\right](S_T-X)dS_T$$

El cálculo de los valores numéricos de los cinco parámetros desconocidos λ , α_i, β_i se efectúa de manera explícita mediante metodologías de ajuste de mínimos cuadrados no lineales.

La información captada mediante las funciones de densidad neutrales al riesgo puede ser resumida mediante el uso de indicadores estadísticos usuales, por ejemplo la media

$$E_Q\left[S_T\right] = \int_0^\infty S_T q(S_T)dS_T$$

se interpretará como el valor futuro promedio del activo subyacente. La desviación estándar, como es sabido, es una medida de volatilidad de los precios, y consecuentemente medirá el grado de incertidumbre inherente al modelo del mercado. El sesgo de la distribución indicará que tan probable será un evento por debajo o sobre la media, dependiendo si éste es positivo o negativo. La curtosis mide la posibilidad (o verosimilitud) de los llamados eventos extremos o raros, ya que lo que hace es medir que tan anchas son las "colas" de la densidad de distribución de probabilidad. Bajo la hipótesis de un mercado relativamente estable durante un cierto período, los cambios observados en las funciones de densidad neutrales al riesgo de un período a otro reflejarán los cambios de expectativas en el mercado relativo a los precios de los activos subyacentes.

Resumiendo, el objetivo es medir los distintos parámetros para las funciones densidad calculadas, por ejemplo, para instrumentos financieros con plazos de vencimiento diferentes y el mismo activo subyacente o viceversa, el mismo plazo de vencimiento con distintos activos subyacentes. Esto permite comparar e identificar expectativas del mercado concernientes a posibles comportamientos futuros de precios de activos. El potencial de aplicaciones en el campo de políticas aún está por desarrollarse, pero una herramienta de cálculo de este tipo permitiría identificar cambios en las estructuras del mercado relacionadas con las condiciones monetarias. Por ejemplo, como las densidades neutrales al riesgo identifican expectativas, sería deseable medir la credibilidad de medidas de política monetaria en el mercado, calculando mediante dichas densidades los valores de tasas de inflación esperadas. La discrepancia con las metas establecidas por las autoridades monetarias mediría la brecha de credibilidad de tales medidas.

IV. INSTRUMENTOS DERIVADOS Y POLITICAS DE BANCA CENTRAL

IV.1 Efectos de los derivados financieros en la transmisión de precios:

Es necesario observar que, aunque por definición el precio de un derivado depende del activo subyacente, existe la posibilidad bajo ciertas circunstancias de que se genere un efecto de retroalimentación en el sentido siguiente: por ejemplo, si se da un desequilibrio entre la oferta y la demanda de derivados relacionados a un activo subyacente dado, esto conduciría a oportunidades de arbitraje, por lo que al ajustarse los precios a un nuevo equilibrio, la dinámica del proceso de ajuste causaría un movimiento de precios en términos del activo subyacente.

Sin embargo, tal vez el impacto más importante de los derivados en el mercado financiero sea el nivel de liquidez de éstos, lo cual a su vez redunda en una aceleración en los mecanismos de transmisión de precios en el mercado financiero en caso de desequilibrios en el mercado o en caso de shocks. Estos efectos influirán en los mercados "spots" a su debido tiempo, según se observó anteriormente.

Por otra parte, del punto de vista de negociación de divisas, los derivados juegan también un papel en la transmisión de precios. Los agentes buscan tasas de retorno similares sobre activos similares en países distintos, de manera que si ambos países tienen un mercado de derivados, los diferenciales en las tasas de interés ofrecerán oportunidades de arbitraje. De nuevo, estos desequilibrios empujan a un incremento para la tasa de interés del país que la tenga baja y a disminuir la de aquel que la tiene más alta. De otra manera, si el diferencial se mantiene, la divisa del país con mayor tasa tenderá a apreciarse. Este efecto podría inducir serios desequilibrios monetarios, especialmente si se trata de países pequeños, donde los flujos de capital podrían crear grandes expansiones no deseadas en la base monetaria. De esta manera, la negociación de instrumentos derivados en gran escala conllevaría hacia una armonización entre tipos de cambio y tasas de interés, a nivel doméstico e internacional, por lo que sí la política monetaria no fuese congruente con la coyuntura dada, los desequilibrios en los mercados de derivados podrían generar movimientos en los flujos de capital, los cuales a su vez presionarían el tipo de cambio y la tasa de interés.

IV.2. Efectos en política monetaria:

Los mercados de derivados, debido a su liquidez, pueden reaccionar más rápido frente a los shocks generados por la política monetaria, ya que la transmisión y el ajuste de precios se efectúan de manera más acelerada. En este sentido, tal parece que los efectos de los tres instrumentos usuales de política monetaria como son la tasa de interés, el crédito doméstico y el tipo de cambio generan consecuencias de diversa índole sobre dicho mercado y viceversa, las reacciones de éste mediante el ajuste de precios podrían afectar el comportamiento de las variables mencionadas.

Por otra parte, del punto de vista de política monetaria y cambiaria, la utilización de tales instrumentos por parte de la Banca Central presenta nuevas alternativas, las cuales ya han sido objeto de algunas experiencias y estudios. Al respecto cabe mencionar el caso del mecanismo de opciones de venta de dólares del Banco de México. Los instrumentos derivados ofrecen nuevas posibilidades para las operaciones de mercado abierto, por ejemplo, si la Banca Central emitiese opciones de precio bajo en relación al mercado, este tipo de operaciones podría redundar en un decremento de la volatilidad del mercado, aunque de alguna manera la Banca Central estaría subsidiando un seguro en el mercado frente a la volatilidad de éste. Por otro lado, en caso de movimientos inesperados en la volatilidad, las pérdidas del Banco Central podrían ser de una enorme magnitud.

IV.3 Efectos de los instrumentos derivados en los mercados financieros

El objetivo general de la Banca Central en un país es mantener la estabilidad de precios, lo cual se obtiene mediante medidas de política monetaria que incentivan a los agentes económicos a tomar decisiones en lo que a gasto y ahorro se refiere, decisiones que a su vez tendrán un efecto sobre el nivel de precios y otras variables macroeconómicas. Al alterar los mecanismos internos de los mercados financieros, (por ejemplo, la tasa de interés) se esperaría que el uso de derivados afecte de alguna manera los mecanismos usuales de transmisión de medidas de política monetaria.

Como se mencionó en la introducción, el uso y desarrollo a gran escala de los instrumentos derivados tiene como consecuencia una mayor eficiencia del mercado. La oportunidad de redistribuir riesgos, obtener un mayor nivel de apalancamiento y un mejor mecanismo de substitución de activos son propiedades de estos instrumentos que implican una mayor rapidez en la comunicación de precios. Se mencionó asimismo que por otro lado existen efectos adversos a tomar en cuenta: variaciones bruscas e imprevistas en los precios, riesgo sistémico y movimientos adversos en los flujos de capital son aspectos a tomar en cuenta y que pueden generarse o ampliarse en caso de una estrategia de cobertura no adecuada.

La presencia de los instrumentos financieros derivados puede por lo tanto afectar el comportamiento de los mecanismos de transmisión de la política monetaria de diversas maneras: por un lado los mercados de derivados se encuentran ligados a otros mercados; por el otro, los derivados incrementan el tamaño de éstos en términos de obligaciones, además de servir como fuente adicional de información sobre los precios. En el contexto de los mercados internacionales, los derivados pueden facilitar las oportunidades de arbitraje, en el sentido de poder efectuar transacciones más directas y menos costosas, alterando así los mecanismos de transmisión a nivel internacional.

La mayor liquidez que proporcionan los derivados respecto a otros activos financieros facilita a los mercados de estos instrumentos reaccionar con mayor prontitud frente a los shocks generados por la política monetaria. Es decir, los precios se ajustarán más rápidamente que en el mercado de activos subyacentes, donde los costos de transacción son mayores. En este contexto, la retroalimentación entre precios de derivados y precios de subyacentes debería contribuir a generar más rápidamente una reacción de los precios de éstos últimos.

En suma, la presencia a gran escala de los instrumentos derivados implica respuestas más rápidas de los precios en los mercados financieros frente a los shocks generados por acciones de política monetaria. Sin embargo, en el caso de tasas de interés de mercado para bonos el impacto en la aceleración de los mecanismos de transmisión parece ser marginal, ya que dichas tasas de interés, generalmente responden en forma ágil frente a cambios en los mercados. Tal pareciera que el efecto de aceleración sería mayor en el caso de activos menos líquidos, o, en aquellos casos donde se transmiten efectos entre varios tipos de activos, ya sea por el canal del tipo de cambio o al efectuarse arbitrajes apalancados en activos correlacionados. En el caso de un mercado no proclive a la liquidez puede suceder lo siguiente:

a) que el volumen de negociación es muy bajo, de manera que los precios varían lentamente
b) b) el volumen de activos negociados es unidireccional, y por consiguiente, el precio de mercado no llega a ajustarse al equilibrio . Si el mercado gana en liquidez, los mecanismos de transmisión de información de los precios serán más eficientes, y los precios tenderán a su valor en equilibrio (Vrolijk (1997)). En términos de la teoría económica financiera, diremos que los instrumentos derivados coadyuvarán a que los mercados financieros

tiendan a ser completos (desde una perspectiva teórica, en un mercado financiero completo, todo activo financiero tendrá un precio de equilibrio en cada posible escenario).

En la actualidad, en el contexto de mercados internacionales, los efectos de una política se transmiten a nivel internacional en función de la interdependencia de las economías, de manera que las estructuras de tasas de interés y tipos de cambio no pueden variar significativamente entre países sin que se generen presiones en dichas variables. Por ejemplo, una política monetaria contractiva implementada en términos de incrementos de la tasa de interés implicaría en igualdad de condiciones una apreciación del tipo de cambio, la cual a vez causa desestímulos en las exportaciones, induciendo a su vez cambios ulteriores en el tipo de cambio real. El uso de instrumentos derivados puede tener influencias sobre este efecto, en virtud de que los derivados con activos subyacentes en términos de divisas serán utilizados por exportadores e importadores con fines de cobertura de riesgo en relación a variaciones del tipo de cambio nominal. Por otro lado, el uso de derivados en forma masiva con fines de cobertura puede afectar los flujos de capital, lo cual podría ocasionar desequilibrios en el corto plazo.

Otro aspecto a tomar en cuenta dentro del contexto de los mercados internacionales es el de los efectos de la paridad de tasas de interés. Tal parece que la actividad de los mercados de divisas a gran escala fortalece la relación de la denominada paridad cubierta de tasas de interés y mediante la relación entre los mercados de derivados y el mercado "spot", en última instancia se fortalece la relación de paridad descubierta de tasas de interés descubierta. Es decir, el uso a gran escala de derivados coadyuva a la estabilización de la relación entre tipos de cambio y de tasas de interés doméstica y foránea.

En suma, la posibilidad de diseñar coberturas en la negociación de divisas y la disponibilidad creciente de capitalización mediante la utilización de derivados ayuda a incrementar el nivel de los flujos de capital que se generen como respuesta a cambios de política que afecten principalmente a las variaciones en las tasas de interés.

IV.4 Opciones sobre divisas y estrategias de cobertura

Los instrumentos derivados ofrecen nuevas alternativas para operaciones de mercado abierto por parte de la Banca Central. Previamente se anotó en la introducción que una posible aplicación de las opciones podría ser en el mercado cambiario, con el objetivo de reducir la volatilidad de éste. Hasta ahora las experiencias son relativamente escasas, pero existen algunos estudios teóricos al respecto que aportan un primer paso. A este efecto se presentan en este inciso algunos resultados basados en una investigación sobre esta temática publicados recientemente por Zapatero y Reverter (1997).

La idea propuesta por los autores mencionados es la siguiente: cuando una institución financiera conforma un portafolio de opciones, asume un riesgo, debido a las posibles fluctuaciones de los activos subyacentes. Como consecuencia de ello, la institución involucrada debe asumir simultáneamente una estrategia de cobertura que le permita contrarrestar posibles efectos adversos y, de esta manera, mantener nula la exposición al riesgo en referencia. Por ejemplo, si el inversionista tiene una llamada posición larga en opciones de compra (es decir, tiene opciones call en su haber), corre el riesgo de incurrir en una pérdida en caso de una baja en el precio del subyacente. Para cubrir el posible riesgo se deberá diseñar una posición de cobertura (hedging) que revierta el efecto de la posición larga mencionada; dicha cobertura se implementará utilizando otro instrumento con un rendimiento que compense el rendimiento de la posición original. Por múltiples razones, muchas veces no es posible comprar en el mercado el instrumento requerido para la cobertura, por lo que se busca replicar el rendimiento del instrumento buscado mediante la construcción de un portafolio, usualmente conformado por una combinación de compras y ventas de activos y bonos. A esto se le llama construir un instrumento sintético de cobertura, ya que el rendimiento de este portafolio es equivalente al de un instrumento derivado, pero con signo opuesto al del instrumento original adquirido. En el caso de la posición larga mencionada, su cobertura la daría una posición corta sobre el mismo instrumento.

Para construir la posición sintética, se calcula el llamado portafolio replicante, en base del activo subyacente S_t y el activo sin riesgo B_t, como ya fue explicado en el capítulo previo. Dado el rendimiento del derivado X_t en una etapa dada t , se calculan las magnitudes Δ y ϕ tales que para todo posible escenario en la etapa t:

$$X_t = \Delta S_t + \phi B_t$$

Nótese que la magnitud Δ mide la razón de la variación del valor del instrumento X respecto a la variación del precio del subyacente S. De hecho, en el contexto de modelos continuos se tiene:

$$\Delta = \frac{\partial X}{\partial S}$$

Tal indicador Δ es susceptible de ser calculado de manera explícita, basados en la fórmula siguiente, la cual fue enunciada por Garman y Kohlhagen siendo utilizada para la valuación de opciones de compra de divisas:

$$C(S,T-t) = e^{-R(T-t)} S N(d_1) - e^{-r(T-t)} E N(d_2)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r - R + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$C(S,T-t)$: prima de la opción de compra sobre tipo de cambio
(compra divisa Y/ venta divisa X)

S : tipo de cambio "spot"

E : precio de ejercicio

T : etapa de vencimiento de la opción

t : etapa evaluación de la opción

T-t : tiempo hasta el vencimiento de la opción (medido en múltiplos de años)

r : tasa de interés de la divisa X durante el período de validez de la opción

R : tasa de interés de la divisa Y durante el período de validez de la opción

σ : volatilidad del tipo de cambio "spot" durante el período de validez de la opción

$N(d)$: distribución normal acumulada

De manera que para el cálculo del indicador Δ se tiene:

$$\Delta = e^{-R(T-t)} N(d_1)$$

Nótese que en el caso de la opción de compra el valor de Δ es siempre positivo. Para el caso de la opción de venta se efectúa un cálculo de forma totalmente análoga, siendo en este caso el valor del indicador:

$$\Delta = -e^{R(T-t)} N(-d_1)$$

El valor del indicador Δ en el caso de la opción de venta es siempre negativo.

En el caso de la opción de compra, a partir de la fórmula $X_t = \Delta S_t + \phi B_t$ se infiere que para replicar el efecto de una "call" en posición larga, se deberán comprar Δ unidades del activo subyacente. La diferencia entre el monto de la inversión y el precio de la opción deberá ser cubierta mediante operaciones en el mercado financiero doméstico (en el sentido de venta de bonos o préstamo a la tasa libre de riesgo). En el caso de la posición corta, que sería la correspondiente a la cobertura de la compra del "call", se deberán vender Δ unidades del activo subyacente, debido al cambio de signo.

En el caso de la posición corta de la opción de compra la razón Δ será negativa, esto indica que para crear la opción sintética se deberá vender un monto Δ del activo subyacente y utilizar el ingreso para invertirlo en activos sin riesgo (bonos) por un monto $\phi B = X - \Delta S$. A este tipo de estrategia de cobertura donde el cálculo del indicador Δ juega este importante papel se le llama cobertura delta (“delta-hedging“).

IV.5 Intervenciones en política cambiaria con opciones sobre divisas y sus efectos

Suponiendo que el Banco Central vende una opción de compra de divisas a un banco del sistema, éste deberá cubrir su posición, lo cual implica replicar una posición corta de la opción "call" en el sentido mencionado anteriormente. Esto significa, según lo explicado, que el banco comprador deberá vender un monto de la moneda extranjera como parte de su cobertura. Si esto se hiciera a gran escala, a nivel de todo el sistema bancario, la consecuencia de la estrategia del Banco Central sería una tendencia al incremento de la oferta de divisas en el mercado cambiario.

Bajo el supuesto de que se llevan a cabo coberturas de riesgo en gran escala, el Banco Central puede inducir en el mercado cambiario un efecto similar al de vender reservas al comprar opciones de venta de divisas (posición larga en términos de opciones "puts"). Bajo estas circunstancias, la institución financiera que vende la opción, o sea, que incurre en una posición corta, deberá cubrirse de una posible baja del precio del subyacente, mediante la replicación de una posición larga en términos de opciones de venta. En este tipo de posiciones, el valor del instrumento decrece al subir el precio del subyacente, es decir, el indicador "delta" será negativo ($\Delta<0$). La opción sintética correspondiente se construirá entonces mediante la venta a corto del activo subyacente (en este caso la divisa) y la compra de bonos. Lo interesante es que si dichas estrategias de cobertura se llevaran a cabo a gran escala, el resultado final sería una baja de la tasa de interés en los bonos, ya que la alta demanda de éstos incidiría sobre aquélla.

En otras palabras, siguiendo este esquema de razonamientos, eso implica que la negociación de opciones de divisas tendría un efecto directo en el mercado cambiario, ya que si se busca la replicación del instrumento con fines de cobertura, esto obligaría al banco del sistema a vender ciertos montos del activo subyacente, es decir la divisa en cuestión. Para completar la estrategia, el hecho de vender el activo implica una posición larga respecto del bono, según se describe mediante la fórmula siguiente:

$$\phi B = X - \Delta S > 0 .$$

En consecuencia, si el Banco Central vende opciones de compra o compra opciones de venta de divisas, el resultado será un incremento en la demanda de bonos, según los montos indicados por la "delta" correspondiente. Por consiguiente, esto generará un efecto en el mercado financiero: si la demanda de bonos es de tal magnitud que la tasa de interés libre de riesgo del mercado (tasa de interés de los bonos) es afectada a la baja, ésta a su vez influirá sobre el tipo de cambio. Esto significaría que la negociación de opciones tendría un efecto indirecto sobre el mercado cambiario. Lógicamente, si las intervenciones del Banco Central se llevaran a cabo en sentido contrario, los efectos serían opuestos a los indicados.

Nótese asimismo que los efectos de la negociación de opciones en el mercado continuarán mientras las opciones se mantengan válidas. Sin embargo, en el transcurso del tiempo los valores de Δ y B no permanecerán constantes. Otro punto importante a tomar en cuenta es que, cuando el Banco Central intervenga con este tipo de instrumentos, por ejemplo, dado un escenario en el que el tipo de cambio suba, la tasa de interés tenderá a la baja; y viceversa, en el caso de que intervenga con las estrategias opuestas cuando el tipo de cambio baja, la tasa de interés tenderá al alza. Consecuentemente, este tipo de intervenciones deberá ser complementado con otras medidas de política monetaria que contribuyan a estabilizar el tipo de cambio.

Según simulaciones numéricas presentadas en el trabajo de Zapatero y Reverter, tal parece que las intervenciones en el mercado de divisas mediante opciones tales como las descritas, serían una posible alternativa a tomar en contraposición a las intervenciones de tipo tradicional. En los ejercicios de simulación presentados por los autores mencionados, la volatilidad del tipo de cambio es menor en los escenarios donde se lleva a cabo una intervención con opciones, además, la tasa de interés se estabiliza a un nivel mas bajo, y tiene una menor volatilidad. Por consiguiente, el Banco Central podría implementar medidas de ajuste de política monetaria a fin de complementar las intervenciones en el mercado cambiario. En otras palabras, tal parece que las intervenciones mediante opciones de divisas por parte del Banco Central serían más eficientes que las intervenciones de tipo tradicional, sobre todo del punto de vista de utilización de reservas. Sin embargo, los autores enfatizan el hecho de que los resultados de los cálculos numéricos dependen de parámetros estructurales que se dan en la economía, en especial, dependen del valor de la elasticidad cruzada del tipo de cambio respecto a la tasa de interés de los bonos (interrelación mercado cambiario-mercado de bonos).

V. EL USO DE INSTRUMENTOS DERIVADOS EN POLITICA CAMBIARIA: EL CASO DEL BANCO DE MEXICO

V.1 Antecedentes

Dado el marco actual de globalización económica e integración comercial, el dólar americano ha tomado una importancia creciente dentro de la economía mexicana. A finales de 1997, el volumen de exportaciones e importaciones rebasó el umbral de cien millardos de dólares, y si adicionalmente se toma en cuenta que más de las dos terceras partes del comercio internacional de México se lleva a cabo con los Estados Unidos, este dato puede dar una idea de lo estrecho que es el nexo del peso mexicano con el dólar.

Hasta mediados de los setentas, el tipo de cambio del peso versus el dólar fue una variable muy estable, prácticamente estática. Desafortunadamente, una serie de condiciones macroeconómicas motivaron cambios en la política cambiaria, de manera que a partir de 1976, una sucesión de regímenes cambiarios de diversa índole fueron implementados. A finales de 1991 se implementó un régimen de flotación en banda, sistema que se mantuvo bajo alguna variantes hasta finales de 1994, cuando las presiones especulativas contra el peso tuvieron como consecuencia ajustes del tipo de cambio en un régimen de libre flotación. Sin embargo, a partir de 1996 el tipo de cambio se estabiliza notablemente, fruto de condiciones macroeconómicas más estables. Es precisamente en el contexto de esta coyuntura que el Banco de México diseña un programa de acumulación de divisas mediante la venta de opciones de venta de dólares (opciones "put"). De esta manera, el siete de Agosto de 1996, el Banco de México inició por primera vez la utilización de un instrumento financiero derivado como instrumento en el marco de su política cambiaria. En la fecha mencionada fueron subastadas al sistema bancario nacional opciones de venta de dólares americanos por el valor de ciento treinta millones. Dicha iniciativa fue el inicio de una estrategia de acumulación de divisas por parte del Banco Central, pero diseñada buscando no enviar señales al mercado cambiario que pudiesen generar expectativas que perturbaran el régimen de libre flotación. Asimismo, los montos de circulante generados por la compra de divisas son esterilizados en su totalidad por las autoridades monetarias, a fin de no afectar la oferta monetaria.

Hay que tomar en cuenta que tal instrumento no fue el primero de este tipo negociado en pesos mexicanos, ya que desde años atrás otros instrumentos derivados basados en esta moneda han sido negociados en el mercado bursátil de Chicago. De hecho el mercado de futuros del peso ha tenido un crecimiento extraordinario durante los últimos cuatro años.

V.2 Estructura de las opciones de venta:

Como se mencionó anteriormente, las subastas de opciones se iniciaron por un monto de 130 millones de dólares, monto que se aumentó a 200 millones en septiembre de 1996 y llegó en diciembre del mismo año a 300 millones. A partir de febrero de 1997 se introdujo una variante, tomando en cuenta la posibilidad de que más de un ochenta por ciento de las opciones fuesen ejercidas antes de finalizar la primera quincena del mes (es decir, antes del día 16) , en tal caso se resolvió convocar a subastas por 300 millones adicionales, pero negociando opciones de venta válidas solamente por el resto del mes respectivo. A mediados del mismo año el monto fue incrementado de nuevo hasta 500 millones de dólares, reduciéndose de nuevo en octubre a 400 millones y después a principios de noviembre a 250 millones, monto que se mantiene válido hasta la fecha. Debido a la cláusula de auto-renovación, esto representa una compra potencial de 500 millones.

El esquema funciona de la siguiente manera:

1-El último día hábil del mes el Banco de México subasta entre las instituciones bancarias derechos de venta de dólares americanos, los cuales podrán ejercerse en su totalidad o en parte a lo largo del mes posterior al mes de la subasta ante el mismo Banco. El hecho de que puedan ser ejercidas a criterio del tenedor hace que éstas sean susceptibles de ser clasificadas como opciones de tipo americano.

2-Sin embargo, existe una diferencia con la opción clásica tipo americano, ya que el precio de ejercicio no queda fijo en el momento de la adquisición de la opción. Los tenedores podrán vender los dólares al tipo de cambio ***fix*** anunciado para el día. Dicho tipo de cambio es anunciado 48 horas antes de su vigencia, de manera que el tenedor de la opción se beneficiará en caso de que el tipo de cambio se aprecie en un día. Es decir, se tendrá como expresión del valor intrínseco:

$$VI = \max(S_{t-1} - S_t, 0) = \max(-\Delta S_t, 0)$$

En esta fórmula la variable S_t, designa al tipo de cambio *spot* correspondiente al día *t*. El precio de ejercicio del día *t* sería entonces igual a S_{t-1}.

De hecho, si observamos que el precio de ejercicio se fija cada día, podría considerarse este instrumento como una opción tipo europeo con duración de un día, la cual se autorenovará diariamente durante un mes, siempre y cuando no sea ejercida. Por otro lado, es necesario prevenir los casos cuando el tipo de cambio acelera su depreciación de forma tal que sobrepasa su nivel de equilibrio, sufriendo posteriormente una apreciación, lo cual genera un fenómeno de tipo "*overshooting*". Con el propósito de salvar este tipo de situaciones, una restricción adicional es tomada en cuenta: la opción sólo podrá ser ejercida en el caso de que μ_t, el valor del promedio móvil del tipo de cambio, calculado en base de los últimos 20 días. sea mayor al precio de ejercicio.

Es decir:

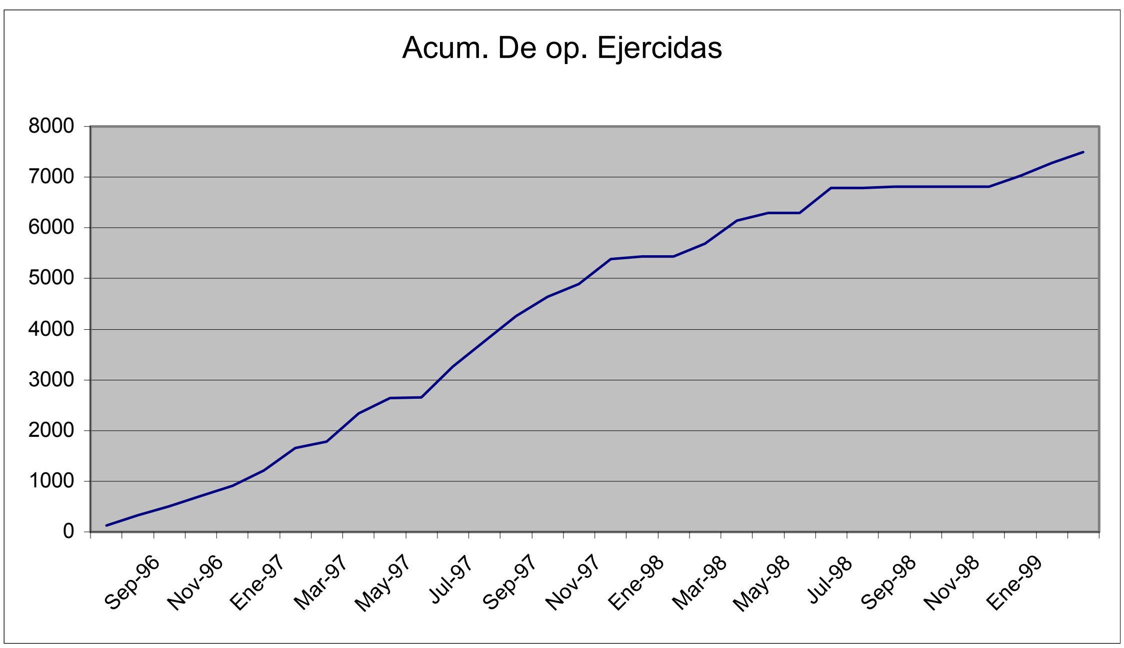
$$\mu_t = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} S_{t-i})$$

De esta manera la función de valor intrínseco de la opción se plantearía matemáticamente de la forma siguiente:

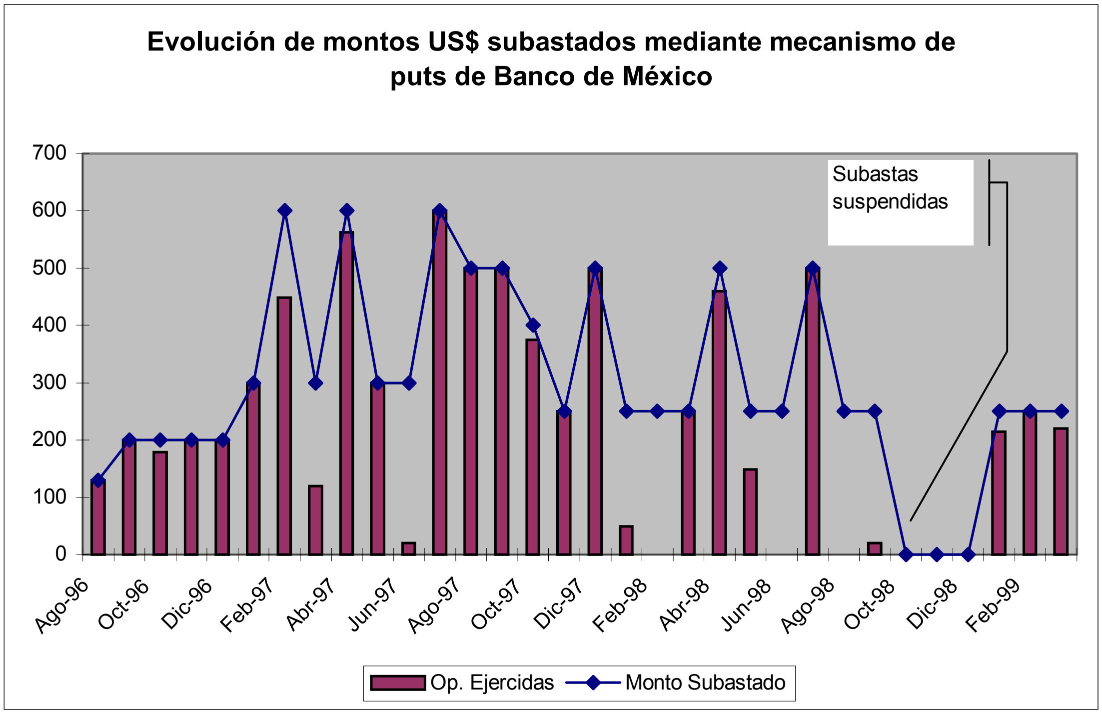
$$VI = \begin{cases} \max(-\Delta S_t, 0), si\ \mu_t > S_{t-1} \\ 0, si\ \mu_t \leq S_{t-1} \end{cases}$$

Esta restricción convierte al instrumento en una opción *barrera*, es decir, se define una barrera que será activada cuando el valor μ_t la alcance, en cuyo caso la opción será invalidada y no podrá ser ejercida. El instrumento derivado sería una llamada opción barrera de tipo *knock-out.* Podría establecerse una analogía con una canasta de opciones europeas tipo barrera, de las cuales al tenedor sería otorgada una diaria, con vencimiento a un día. Dicho proceso se llevaría a cabo desde el otorgamiento en la subasta hasta su vencimiento, siempre y cuando la opción no sea ejercida durante el transcurso del período de validez.

El mecanismo de compras de dólares mediante "puts" ha sido utilizado de manera sostenida desde su implementación. Para ilustrar su comportamiento se presentan dos gráficas, la primera describe la evolución de montos de dólares US subastados y ejercidos mediante las opciones de venta y la segunda muestra la evolución del monto de divisas acumulado a lo largo del período de implementación del instrumento derivado.

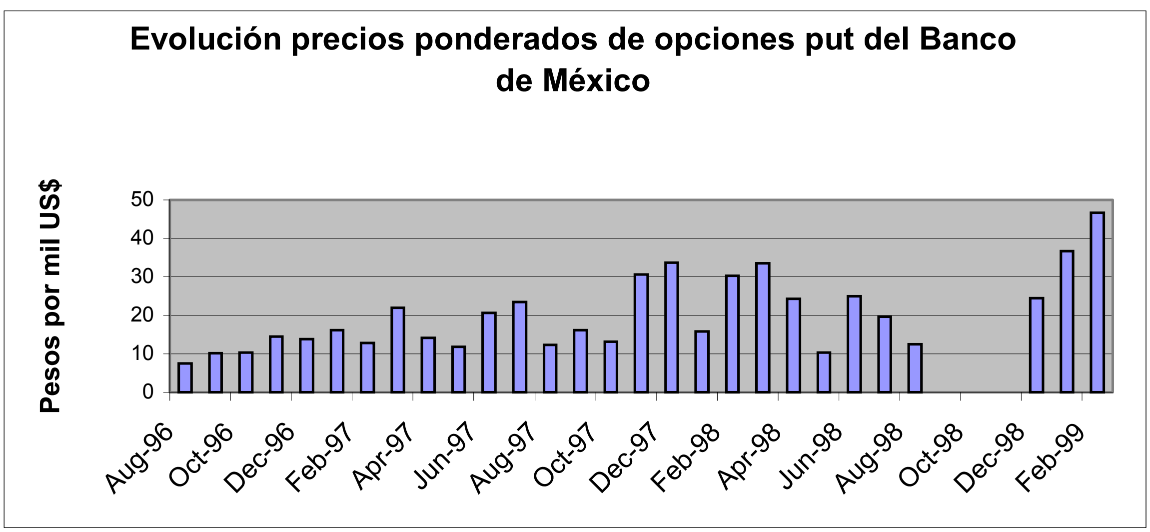


Fuente: Banco de México



Fuente: Banco de México

Diversos estudios han sido desarrollados sobre modelos de valuación del instrumento así como para cálculo de funciones óptimas de ejercicio, cabe mencionar el artículo de Galán, Duclaud y García Tamés (1997), así como el de Werner y Milo (1998). A partir de los estudios mencionados tal pareciera que la opción ha sido consistentemente subvaluada, queda por establecer si este hecho es inherente a la estructura del mercado cambiario mexicano o es debido a la estructura del modelo matemático utilizado.



Fuen te: Banco de México

VI. APENDICE:

Fundamentos matemáticos

VI.1. Capitalización continua

En el marco de la teoría financiera moderna, lo usual es considerar un modelo de capitalización continua, es decir, el cálculo de la capitalización mediante interés compuesto se lleva a cabo asumiendo que el período de capitalización es cada vez más pequeño. O sea, si tenemos una tasa de interés nominal anual *r* y se deposita una cantidad C_0 , al transcurrir *m* períodos (ya sean meses, semanas, días) se genera un monto *C* dado por: $C = C_0\left[1+\left(r/m\right)\right]^m$.

Al componer intereses en forma continua, la fórmula a utilizar será:

$C = C_0 e^{rT}$, donde T designa la longitud del intervalo completo de inversión, y e =2.7818.... denota la constante de Euler, base de los logaritmos naturales.

VI.2. Elementos sobre teoría de probabilidades:

Como se ha podido observar de la discusión presentada, los precios son modelados matemáticamente como variables aleatorias. El comportamiento de éstas es descrito mediante las así llamadas funciones de densidad de probabilidades. Por ejemplo, si asumimos que la variable aleatoria X puede tomar su valor sobre un número finito de valores disponibles $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, entonces podemos escribir la función de densidad de probabilidades como $p(x_i)$, ésta representa la probabilidad de que la variable aleatoria X tome el valor x_i , es decir, $p(x_i) = prob(X = x_i)$. Dicho valor será siempre no-negativo para todo x_i y además $\sum p(x_i) = 1$.

La distribución acumulada de probabilidad de la variable aleatoria X es la función *F(ξ)* , la cual se define como $F(\xi) = prob(X \le \xi)$. Nótese que en el caso de que la variable aleatoria X tome su valor sobre un intervalo continuo, entonces la derivada de la distribución acumulada *F* será igual a la función densidad, es decir: $\frac{dF}{d\xi} = p(\xi)$

Estas propiedades permiten definir el valor esperado de X:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi p(\xi) d\xi = \mu$$

así como la varianza de X:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)^2 p(\xi) d\xi = \sigma_X^2$$

y en el caso de dos variables aleatorias X e Y, la covarianza de X y Y:

$$\sigma_{X,Y} = \operatorname{cov}(X,Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)(\eta - \nu) p(\xi,\eta)\, d\eta\, d\xi$$

donde $p(\xi,\eta)$ describe la llamada función de densidad conjunta para ambas variables aleatorias X e Y.

De manera más general puede definirse la matriz de varianzas y covarianzas de X e Y:

$$V = \begin{pmatrix} \sigma_X^{\ 2} & \sigma_{X,Y} \\ \sigma_{X,Y} & \sigma_Y^{\ 2} \end{pmatrix}$$

Este tipo de matrices puede ser generalizada para el caso de un mayor número de variables aleatorias.

VI.3. Variables aleatorias normales:

Una variable aleatoria X con valor esperado μ y varianza σ^2 es de tipo normal o gaussiana si la función de densidad correspondiente es de la forma

$$p(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\xi - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Para el caso μ=0 y σ^2=1 se tiene el caso especial de una variable normalizada siendo la función de distribución normal acumulada correspondiente:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

Un caso especial de mucha importancia para el análisis de precios como variables aleatorias es cuando la variable *ln Z* es de tipo normal. Se dice en este caso que Z es una variable de tipo lognormal. De manera equivalente, si X es normal, entonces $Z = e^X$ es lognormal. Se tienen entonces las siguientes propiedades:

$$E(\ln Z) = \nu \,,\; E(Z) = e^{(\nu + \sigma^2/2)}$$

$$Var(\ln Z) = \sigma^2 \,,\; Var(Z) = e^{(2\nu + \sigma^2)}(e^{\sigma^2} - 1)$$

En muchos casos relevantes, el comportamiento de los precios se modela asumiendo que éstos son variables aleatorias de tipo lognormal.

VI.4. Procesos aleatorios:

Un proceso aleatorio o estocástico $\{S_t : t \in T\}$ es una familia de variables aleatorias, donde usualmente el subíndice *t* indica una etapa en el tiempo y S_t representa el estado del proceso en el tiempo. En el caso que nos interesa, el proceso S_t describe la evolución del precio de un activo.

Diremos que el proceso aleatorio $\{W_t : t \geq 0\}$ es un movimiento brownniano si cumple las siguientes propiedades:

1. W_t es continuo y $W_0 = 0$
2. En cada etapa *t*, el valor de W_t es una variable aleatoria de tipo normal con valor esperado nulo y varianza igual a *t*.
3. Para toda pareja de intervalos de tiempo disjuntos $[t_1, t_2], [t_3, t_4]$, los incrementos correspondientes $W_{t_4} - W_{t_3}, W_{t_2} - W_{t_1}$ son variables aleatorias independientes entre sí, distribuidas normalmente.

Las hipótesis esenciales para el modelo de proceso de precios es que éstos se comportan como variables aleatorias tipo lognormal , por otro lado, que los incrementos $\ln S_{t+s} - \ln S_t$ sean variables aleatorias de tipo normal-gaussiano con valor esperado νt y varianza $\sigma^2 t$. En este caso, al proceso aleatorio correspondiente $\{S_t\}_{\in T}$ se le denomina un movimiento brownniano geométrico.

Para efectos de cálculo del valor esperado en cada etapa *t* se tiene:

$$E[\ln S_t] = E[\ln S_0] + \nu t$$

o en forma equivalente:

$$E[S_t] = S_0 e^{\left(\nu + \sigma^2/2\right) t}.$$

y además, para el caso de la varianza:

$$Var(\ln(S_t / S_0)) = \sigma^2 t.$$

En otras palabras, se asume que la variable de precios S_t, se modela mediante:

$$S_t = S_0 \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W_t),$$

donde W_t es un movimiento brownniano.

Según se ha podido apreciar en observaciones estadísticas, el modelo mencionado anteriormente se ajusta razonablemente al comportamiento de precios de activos financieros.

Otra definición útil en los modelos financieros es la de los procesos aleatorios conocidos como martingalas, en este caso, un proceso S_t es una martingala si el valor esperado en una etapa j está condicionado al conocimiento de la historia del proceso hasta la etapa i, es precisamente el valor observado en dicha etapa i. En forma matemática esto se escribe $E\left(S_j \middle| F_i\right) = S_i$, para toda etapa $i \leq j$. La información conocida hasta la etapa i es representada por F_i.

Es necesario hacer notar que el valor esperado es calculado mediante una medida de probabilidad específica (medida de probabilidad neutral al riesgo), la cual no necesariamente será la probabilidad observada. Se trata en este caso de una medida de probabilidad construida específicamente para el análisis de valuación de opciones, sin embargo, se demuestra que esto será posible si y sólo si el mercado financiero excluye las posibilidades de arbitraje.

VI.5. Modelos de programación lineal para valuación de activos:

Un enfoque alternativo para valuación de activos financieros se da mediante utilización de modelos de programación lineal, los cuales permiten explotar propiedades de dualidad inherentes a la solución del problema primal para calcular medidas neutrales al riesgo. Asumiendo la hipótesis usual de un mercado con ausencia de oportunidades de arbitraje, básicamente se utilizan propiedades de la replicación de portafolios, de manera que, si se asume además que el modelo de mercado financiero sea completo, (es decir, que en base de los instrumentos y escenarios disponibles se puede replicar el activo adicional propuesto) se obtendrá una solución única y la solución del dual correspondiente.

Sea S_t *(t=0,1)* un vector aleatorio para dos etapas en el tiempo, que describe el comportamiento de precios de K+1 activos. Es decir, S_t representa un vector S_t $= S_t = \left(S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^K\right)$. Usualmente la primera componente S_t^0 representa el precio de un activo libre de riesgo, de manera que, si la tasa de interés libre de riesgo está representada por *r*, se tiene:

$$S_1^0 = (1 + r) S_0^0 .$$

Adicionalmente, sea $\varphi = \left(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_K\right)$ el vector que describe las ponderaciones de activos comprados en la etapa inicial *t=0.*

Se define así el valor del portafolio para cada etapa t:

$$V_t(\varphi) = \varphi S_t = \varphi_0 S_t^0 + \varphi_1 S_t^1 + \ldots + \varphi_K S_t^K$$

Para una colección de eventos o escenarios $\{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$ se define la matriz de pagos para la etapa t=1:

$$D^T = \begin{bmatrix} S_1^0 & S_1^1(\omega_1) & \ldots\ldots & S_1^K(\omega_1) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ S_1^0 & S_1^1(\omega_N) & \ldots\ldots & S_1^K(\omega_N) \end{bmatrix}$$

Finalmente se define para un activo contingente X, el vector de rendimientos correspondientes a los posibles escenarios:

$$v = \left(X(\omega_1), \ldots\ldots, X(\omega_N)\right).$$

El modelo de programación lineal a proponer modela el comportamiento del mercado, el cual busca maximizar el valor inicial del portafolio $V_0(\varphi)$ sujeto a que en la etapa siguiente*(t=1),* los posibles valores del portafolio según cada escenario no sobrepasen los rendimientos correspondientes del activo X. Es decir, se calcula el vector φ solución del problema primal (PP):

$$\text{(PP)} \quad \max \varphi S_0$$

$$\text{sujeto a } D^T \varphi \leq v$$

Nótese que las componentes del vector φ no están restringidas a ser positivas, ya que cada activo puede ser comprado o vendido según sea necesario. En caso de que se cumpla la hipótesis de que el mercado sea completo, las restricciones se cumplirán en términos de igualdad, lo cual significa que el portafolio seleccionado será un portafolio replicante del activo X.

Del punto del problema dual, el inversionista busca minimizar el valor esperado del activo contingente, eso implica el cálculo del vector de variables duales o ponderaciones $\psi = (\psi_1, \ldots\ldots, \psi_N)$ que resuelva el problema dual (PD):

$$\text{(PD)} \quad \min \psi X$$

$$\text{sujeto a } D\psi = S_0$$

$\psi \geq 0$ De hecho, a partir de las restricciones planteadas se tiene en el caso del activo libre de riesgo:

$$\psi_1 S_1^0 + \ldots\ldots + \psi_N S_1^0 = (\psi_1 + \ldots\ldots + \psi_N) S_1^0 = S_0^0$$

Como se trata de una relación de valores del activo libre de riesgo entre dos etapas, esto implica

$$\psi_1 + \ldots\ldots + \psi_N = \frac{1}{1+r}$$

Por las propiedades de dualidad y complementariedad, y tomando en cuenta que las restricciones del problema primal se cumplen como igualdades (dada la hipótesis de completitud del mercado), cada variable dual ψ será estrictamente positiva, de manera que, definiendo la nueva variable

$$q_j = (1+r)\psi_j > 0$$

se tiene

$$q_1 + \ldots\ldots + q_N = 1$$

Este resultado justifica definir una medida de probabilidad, la cual será descrita por el vector

$$Q = (q_1, \ldots\ldots, q_N)$$

Mediante tal medida, el valor óptimo del problema dual puede interpretarse como el valor esperado descontado del activo contingente *X*., ya que se calcula:

$$\psi_1 X(\omega_1) + \ldots\ldots + \psi_N X(\omega_N) = (1+r)^{-1}\left(q_1 X(\omega_1) + \ldots + q_N X(\omega_N)\right)$$

Esto es:

$$\psi X = \frac{1}{1+r} E_Q[X]$$

Asimismo, como una consecuencia del teorema fundamental de dualidad, según el cual los valores óptimos del problema primal y dual coinciden, se tiene:

$$\psi X = \frac{1}{1+r} E_Q[X] = \varphi S_0 = V_0(\varphi)$$

O sea, el valor esperado descontado del activo contingente *X* es igual al valor inicial del portafolio replicante de dicho activo. Esta propiedad es utilizada para cálculo de valuaciones de activos, ya que mediante algoritmos de programación lineal, la implementación práctica del método es relativamente sencilla.

VII. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Bahra, B., *Implied risk-neutral probability density functions from option prices: theory and application,* Research Report , Bank of England, 1997

Black, F. y M. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities,* (1973), 81, 637-654

Breeden, D. T. y R. Litzenberger, *Prices of state-contingent claims implicit in option prices,* Journal of Business, (1978) , 51, no. 4, pp. 621-51

Díaz Tinoco, J. y F. Hernández Trillo, *Futuros y Opciones Financieras. Una introducción.* Limusa-Bolsa Mexicana de Valores, 2nda. edición, (1998)

Galán Medina, M. , J. Duclaud y A. García, *Una estrategia de acumulación de reservas mediante opciones de venta de dólares: el caso de Banco de México*, Mimeo, Banco de México (1996)

González de Paz, R. B., *Introducción a los instrumentos derivados y su aplicación al análisis de riesgo*, Cuaderno de Investigación no. 46, Centro de Estudios Latinoamericanos (CEMLA), Diciembre 1998

Goodhart, C. A. E., *Money, information and uncertainty* , The MIT Press, 2nd. edition, (1989)

Hull, J. *Options, Futures, and other Derivative Securities,* Prentice-Hall , 2nd. edition (1993)

Merton, R., *On the pricing of corporate debt,* J. of Finance, **29**, (1974) pp. 449-470

Merton, R. *An analytic derivation of the cost of deposit insurance and loan guarantees,* Journal of Banking and Finance (1977) p.p. 3-11

Rivera-Batiz, F. y L. Rivera Batiz, *International finance and open economy macroeconomics.*, Macmillan, (1994) Sundaram, R. *Equivalent martingale measures and risk-neutral pricing: an expository note*, The Journal of Derivatives, Fall 1997

Vrolijk, C., *Derivatives effects on monetary policy transmission,* IMF Working Paper WP/97/121, Septiembre 1997

Werner, A. y A. Milo *Acumulacion de reservas internacionales a través de la venta de opciones: el caso de México* , Documento de Investigación No. 9801, Dirección General de Investigación Económica, Banco de México, Abril, 1998

Zapatero, F. y L. Reverter *Central Bank intervention with options*, Reporte de Seminario, Centro de Investigación Económica (CIE), Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), Agosto 1977

El **CENTRO DE ESTUDIOS MONETARIOS LATINOAMERICANOS** fue fundado en 1952 por siete bancos centrales de América Latina, a saber: Banco de la República (Colombia), Banco Nacional de Cuba, Banco Central de Chile, Banco Central del Ecuador, Banco de Guatemala, Banco Central de Honduras y Banco de México, S. A. Actualmente, son miembros de la institución los bancos centrales y entidades de supervisión bancaria de América Latina y el Caribe, bancos centrales extrarregionales, así como otras entidades financieras de la región. La lista completa se detalla en la contraportada. En los campos monetario, financiero y bancario el **CEMLA** realiza investigaciones, organiza reuniones y seminarios internacionales sobre problemas operativos y técnicos, recoge experiencias que sistematiza por medio del diseño y administración de programas de capacitación y de asistencia técnica que contribuyen a la formación y actualización de los funcionarios de sus miembros asociados y colaboradores.

Uno de sus objetivos es informar sobre la evolución del pensamiento económico dentro y fuera del área latinoamericana, y difundir los hechos de importancia regional e internacional en materia de políticas monetaria, bancaria, cambiaria y fiscal. Sus libros, revistas y boletines contienen un vasto material de estudio y constituyen una permanente fuente de información para los estudiosos de estos temas.

MIEMBROS DEL CEMLA

ASOCIADOS

Banco Central de la República Argentina
Centrale Bank van Aruba
Central Bank of the Bahamas
Central Bank of Barbados
Central Bank of Belize
Banco Central de Bolivia
Banco Central do Brasil
Cayman Islands Monetary Authority
Banco de la República (Colombia)
Banco Central de Costa Rica
Banco Central de Cuba
Banco Central de Chile
Banco Central del Ecuador
Banco Central de Reserva de El Salvador
Banco de Guatemala
Bank of Guyana
Banque de la République d'Haïti
Banco Central de Honduras
Bank of Jamaica
Banco de México
Bank van de Nederlandse Antillen
Banco Central de Nicaragua
Banco Nacional de Panamá
Banco Central del Paraguay
Banco Central de Reserva del Perú
Banco Central de la República Dominicana
Centrale Bank van Suriname
Central Bank of Trinidad and Tobago
Banco Central del Uruguay
Banco Central de Venezuela
Eastern Caribbean Central Bank

COLABORADORES

Bancos centrales

Deutsche Bundesbank (Alemania)
Bank of Canada
Banco de España
Federal Reserve System (Estados Unidos)
Banque de France
Banca d'Italia
Bank of Japan
Bangko Sentral ng Pilipinas
Banco de Portugal

Organismos supervisores de entidades financieras

Ministry of Finance (Anguilla)
Superintendencia de Bancos y Entidades Financieras (Bolivia)
Superintendencia Bancaria (Colombia)
Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras (Chile)
Superintendencia de Bancos (Ecuador)
Superintendencia del Sistema Financiero (El Salvador)
Superintendencia de Bancos (Guatemala)
Comisión Nacional de Bancos y Seguros (Honduras)
Financial Services Commission (Islas Turks y Caicos)
Financial Services Department (Islas Vírgenes Británicas)
Comisión Nacional Bancaria y de Valores (México)
Superintendencia de Bancos y de otras Instituciones Financieras (Nicaragua)
Superintendencia de Bancos (Panamá)
Superintendencia de Banca y Seguros (Perú)
Comisión de Instituciones Financieras (Puerto Rico)
Superintendencia de Bancos (República Dominicana)
Superintendencia de Bancos y otras Instituciones Financieras (Venezuela)

Otras instituciones

Banco de la Nación Argentina
Banco Nacional de Fomento (Ecuador)
Asociación de Banqueros de México, A. C.
Banco Centroamericano de Integración Económica.
Banco Latinoamericano de Exportaciones, S. A.
Fondo Financiero para el Desarrollo de la Cuenca del Plata
Fondo Latinoamericano de Reservas